Utbildning & Demokrati 2005, vol 14, nr 2, 27–55
Tema: Bildning och demokrati i matematikutbildningen

Matematikens dubbelnatur – undflyende innehåll, självtillräckligt språk

Håkan Lennerstad

This article discusses the role in mathematics of its formal language, here called Mathematish. This language became significant when symbolic mathematics gradually replaced rhetoric mathematics. Mathematics gained in efficiency and calculation became dominant. It is claimed that this happened at the expense of mathematical interpretation, except for those who intuitively understand Mathematish. In linguistic argumentation it is also claimed that the structure of a language is naturally non-articulated for intuitive learners, often teachers, while teaching requires articulation. Languages are often excluding. The relationship between content and language in mathematics is described from several viewpoints. Three distinct types of mathematical knowledge are suggested: 1. How to successfully use Mathematish rules, 2. Mathematish rules (computer programmable grammar), 3. Ideas and meanings of mathematics, e.g. applications and metaphors. Non-formal ways of hinting at mathematical ideas and meanings, shedding light on both Mathematish and content, are suggested.

Prolog

De matematiska idéerna är trummorna som hörs från andra sidan kullen. De är ett sällsamt ljus som framträder över kvällshimlen. Det är en grupp gamla ekar i skogsbrynet som gungar svagt i den växlande vinden. Idéerna är stämningen vi befinner oss i. Det är en sval vind som tar sig genom lägenheten. Man känner den, man vet inte riktigt vad den är, hur den är, hur den ser ut, vad annat den hänger ihop med. De matematiska idéerna är fåglarnas ökande kvitter en ljusnande vårnatt, de är ängens stigande väta under regnet som inte vill sluta.

De matematiska formlerna är arméer som marscherar av och an på pappret. Ibland i perfekt ordning, strikt kolsvarta mot bländvit bakgrund. Ofta i motsträvigt sällskap med sina tystlåtna, långsamma, ständigt närvarande grannar urinvånarna: de geometriska figurerna. Ibland i utdragna splittrade överstrukna gråtoner. Ibland som utspridda rester av ofullständiga halvt utsuddade formler på hopskrynklade ark, bortkastade till glömskan, till utplåningens hopp. De är våra drillborrar, stämjärn, skruvmejslar, hyvlar, fälgkors, släggor, stämmare. Våra stickmaskiner, vävstolar, vedklyvar, blåsbälgar, skalpeller, gipsformar, transportband, höj- och sänkbara sängar.

De matematiska idéerna rör sig i luften runt oss, vi får inte riktigt tag på dem. Jo vi får tag på några mindre idéer, några undersåtar. De är sällsynt vackra. Vi släpper dem igen, de kan ändå inte krossas. Men den stora idén, som inte verkar mera svårfångad än de andra egentligen, svirrar vidare runt förstutrappan. I kväll också, som alla kvällar.

De matematiska formlerna är lydiga och under vår kontroll, som fångens fjättrade kropp under torterarens blick. Ögonens riktade blick, ögonglobernas spelande avsikter. Formlerna svettas passionerat. Pappret buktar sig av fukt, det måste slängas. Så har ännu en formel räddat sig. Men strax finns där en tvillingbror. I nästa cell, på nästa papper. Och så vidare.

Det har hänt förut. Torteraren tvingas inse sin skenbara kontroll. Vägen till helvetet är stensatt av goda avsikter. Han lämnar mentalsjukhuset. Han byter jobb. Du kan finna honom i din närmaste pizzabutik, med mjöl på underarmarna. Han berättar gärna om formlernas kroppar, och deras onåbarhet. För han kan inte sluta tänka på det.

Hans totala makt var skenbar. Meningen, syftet, avsikten, själen, var någon annanstans. Han kunde inte nå dem. Det var endast ett poänglöst, plågsamt jobb som tänjde ut, torterade och förintade honom. Till slut, en natt, var han tvungen att fly.

* * *

Denna artikel behandlar på skilda sätt matematikens mest synliga och gripbara sida, dess formler, och spänningsförhållandet mellan formlerna och innehållet som de representerar. Detta spänningsfält är fundamentalt för matematikens filosofi såväl som för praktisk matematikundervisning. Hur når man elever? Med vilket språk? Tränger formelspråket ut det naturliga språket, berövas de aktiva sitt språk, förlorar de sitt tänkande och sin personliga frihet?

Symbolspråket representerar tankeeffektivitet och uttrycker samtidigt matematikens generalitet, som kanske är matematikens mest karaktäristiska egenskap vid sidan av dess kvantitativa innehåll. I artikeln hävdas att denna språklighet har flera bieffekter i form av missuppfattningar om matematiken, som ger upphov till hinder för matematisk kommunikation. Det förefaller som lingvistisk analys kan spela en viktig roll för att förstå denna kommunikation. En relaterad fråga är vilka litterära former för matematikläroböcker som är effektiva. Ifrågasättande i dialogform kanske är viktigt i matematik, eftersom ämnet (naturligtvis) tål ifrågasättande och dessutom genom sin abstrakta och svårtillgängliga natur inbjuder till många typer av missförstånd. I sådana perspektiv kan både litteraturvetenskap och lingvistik vara vetenskaper som är besläktade med och viktiga för såväl matematiken som matematikdidaktiken. De kan utgöra redskap i ambitionen att beskriva ett innehåll på andra sätt än med dess naturliga språk, bland annat för att indirekt karaktärisera detta språk. Det innebär en process som går utöver explicita kunskapsbegrepp och leder till poetiska/konstnärliga dimensioner.

1. Verklighet, matematik och språk

Matematikens formelspråk

Från 1500-talet och framåt började man att systematiskt använda symboler som ersättning för matematiska begrepp som var väl etablerade av retorisk matematik, som exempelvis ”variabel” (x, y) och ”likhet” (=). Detta innebar en kraftig effektivisering av tänkandet, men kan kontrasteras mot den situation som dagens elever befinner sig i, där man i skolan möter ett formelspråk som mera sällan representerar begrepp som på förhand är etablerade. Relationen till innebörderna är ofta vag.

I denna artikel används ordet ”matematiska” om matematikens formelspråk – som ett språk med ett specifikt alfabet och en specifik regeluppsättning – med andra ord en egen grammatik. Matematikens terminologi, det vill säga ord som ”addition”, kontinuitet”, ”funktion”, och så vidare, används inom svenska språkets grammatik och är därmed inte en del av matematiskan.

Matematiskan har ett alfabet av cirka hundra symboler. Denna mängd av symboler består av tio siffror, latinskt och grekiskt alfabet, samt ett antal specialtecken. Matematiskans grammatik består av språkliga konventioner samt av logiska regler som grammatiserats, det vill säga matematiska sanningar som används som språkliga regler utan att tolkas. Denna grammatik är formulerad av logiker (samt vid konstruktion av dataspråk), men inte i det syfte som naturliga språks grammatik är formulerade: för att göra språket begripligt och användbart för breda grupper av människor. Termen ”matematiska” föreslås i detta syfte: i analogi med naturliga språk, för att beskriva ett matematiskt innehåll (se Lennerstad & Mouwitz 2004).

Man kan beskriva matematisk verksamhet som ett växelspel mellan språk och innehåll. Innebörder påverkar språket, ty nya definitioner och formuleringar tillkommer ofta för att uttrycka matematiska idéer. Men de språkliga formuleringarna påverkar också innehållet. De uttryckssätt som väljs påverkar vad matematiker kan bevisa. För att ett bevis skall anses giltigt av matematikkulturen måste det formuleras på matematiska och vara korrekt. I efterhand framstår svårigheterna att finna bevis som psykologiska, vilka är beroende på valt formuleringssätt. Ofta är rätt val av formulering en nyckel till att finna beviset. Det händer också att nya formuleringssätt ger upphov till nya typer av generaliseringar, det vill säga till nya matematiska begrepp och resultat.

Inte sällan ses naturvetenskaplig forskning som uppgiften att upptäcka ”verklighetens matematik”. Enligt detta synsätt betraktas verkligheten som en förklädd matematik. I denna artikel prövas motsatt utgångspunkt: att matematiken är en språklig förklädnad för människors observationer av skilda aspekter av verkligheten. Abstrakt matematisk forskning handlar om verkligheten, men i förklädd form. Matematikens axiom samt etablerad logik kan motiveras praktiskt, utifrån en långvarig praktik, och utgör länkarna mellan verklighet och matematik. Idéernas symboliska dräkt får ett flertal konsekvenser för uppfattningarna om matematik.

Matematikens oresonliga beviskraft – är Gud matematiker?

I artikeln ”Möjliga världar – en kör av en mångfald själar” i tidskriften *Dialoger*, ett temanummer om Matematik och bildning, målar Lars Gyllensten (1991) upp breda perspektiv som på fascinerande sätt berör förhållandet mellan matematik och verklighet, mellan språk och avsikt, samt mötespunkter mellan humaniora och naturvetenskap. Den har ett flertal beröringspunkter med denna artikel.

Med exempel från Einstein och Planck beskriver Lars Gyllensten (1991) bland annat den klassiska frågan om matematikens oresonliga beviskraft. Han formulerar problemet som:

> Vetenskapsmannen–tänkaren skapar sina teoretiska modeller i en frihet som tycks vara totalt suverän gentemot den empiriska verkligheten.

Chockerande ofta har matematiska skrivbordsprodukter relevans för verkligheten. Vad säger det om ”verkligheten”, med eller utan citationstecken? En annan fråga som är central för denna artikel: vad säger det om matematiken?

En tolkning är att skillnaden mellan matematik och verklighet är mindre än den förefaller. Ofta har verkligheten tolkats som förklädd matematik. Gud som matematiker, verklighetens innersta väsen är matematisk. När fysikerna upptäcker materiens innersta delar upptäcker de dess matematik. Denna text prövar den motsatta tolkningen. Inte verkligheten som förklädd matematik, utan matematiken som förklädd verklighet.

Språkliga dräkter för tänkande

Språk innebär förträffliga möjligheter till förklädnad. Ett hemligt språk, chiffer eller kod är en uppenbar förklädnad för att dölja innehåll. Men det behöver inte finnas en avsiktlighet i förklädnaden för att språk ska fungera döljande. Kanske är många av de matematiska resonemangen och tankefigurerna mer analoga med naturvetenskapens än vi tänker oss. Kanske är de skilda notationssätten den största skillnaden. På grund av radikalt olika språkdräkt (kulturell förklädnad) är eventuella likheter inte alls uppenbara. Kanske är lärande av matematik till stor del lärande av en främmande (för många kontraintuitiv) språkdräkt, mer än lärande av nya idéer – de som språkdräkten för den språkkunnige uttrycker. Kanske har matematiken ärvt praktiska resonemang, bytt beteckningar och upphöjt dem till teori. Kanske använder vi människor inte så många olika typer av resonemang, argument och synsätt, de bara ser olika ut eftersom de är klädda i skilda språk, vokabulärer, sociala kontexter, förekommer i olika vetenskaper, vetenskaperna ovetande. Kanske har matematik konstruerats som en sorts stiliserad verklighet, som växer parallellt med den.

Kanske består svårigheten att lära sig matematik inte så mycket i att förstå dess resonemang och dess idéer. Kanske idéerna och resonemangen är naturliga, men det är svårt att förstå hur man kan skriva dem på symbolspråket. Hur det är möjligt att klämma in sitt tänkande i matematiskans, specifika, historiskt bestämda språkliga form? Att uppnå en samklang mellan det egna tänkandet och denna representation, detta officiella språk?

I avsaknad av detta språkliga perspektiv är kanske den enda förklaring som återstår att man själv är matematiskt obegåvad. Eller att läraren är inkompetent. En musiker kan ha lätt att uttrycka sin musikalitet med klarinett, men svårt med fiol, trots mycket träning på det sämre instrumentet. För en annan är det tvärtom.

Den i matematiska kretsar mycket berömde matematikern Salomon Lefschetz är känd för sin fantastiska intuition. Det sägs dock att han aldrig utförde ett korrekt bevis. Men klarar man sig igenom en formelfixerad utbildning med en matematisk kompetens som inte är formelorienterad (se vidare avsnittet ”Tre skilda typer av matematisk kunskap”)? Mycket riktigt, Lefschetz var ingenjör från början. När han vid en olycka i laboratoriet förlorade sina händer gick han över till matematiken.

Vad är en matematisk idé?

Vad är då en matematisk idé utan sina symboler? Är den naken? Hur ser den då ut? Hur når man bortom orden och symbolerna, ändå med hjälp av ord? Kanske är just detta poesins kärna. Har poesi logik? I så fall vilken?

Denna artikels prolog är ett försök att med poetiska medel antyda spänningsfältet mellan symbolerna och deras betydelser. Vi återkommer till frågan om idéerna bakom symbolerna.

Carl Winslöw (2004) ger exemplen $x^2 + y^2 = 1$, $|z| = 1$, $\{(\cos t, \sin t), 0 \le t < 2\pi\}$, enhetscirkeln, ”$S^1$” och en geometrisk figur, som alla betyder enhetscirkeln (en cirkel med radie 1 och centrum i origo). Det är samma matematiska objekt, med olika representationssätt. Han kallar omskrivningarna för ”objektbevarande transformationer” och objekten själva är ”objekt bortseende från objektbevarande transformationer”. Detta antyder ett innehåll ”bakom” formlerna. Det är något som matematiker utifrån sin praktik säkerligen håller med om. Detta ”innehåll” kan specificeras som den mänskliga förmåga som gör det möjligt att utföra manipulationer på objekt som endast finns mentalt, på liknande sätt som med fysiska äpplen på ett bord.

De olika representationerna kan dock ge skilda associationer som avspeglar skilda avsikter eller sammanhang. Här är förslag på sådana: $x^2 + y^2 = 1$ – en cirkel i planet som kanske skärs av en rät linje; $|z| = 1$ har med komplexa tals absolutbelopp att göra och kanske deras polära form; $\{(\cos t, \sin t), 0 \le t < 2\pi\}$ är en kurva i planet där punkterna ”räknas upp fortlöpande” med variabeln t; enhetscirkeln kan associera till en mer verbal beskrivning av matematiska problem som utspelas på cirkeln; ”S1” kan associera till följden ”S1, S2, S3” och så vidare, som är en cirkel i planet, en sfärisk yta i rymden, en tredimensionell sfärisk yta i en fyrdimensionell rymd, etcetera.

Detta är helt analogt med hur orden ”lukt”, ”doft” och ”bouquet” har samma betydelse enligt synonymordboken, men ger olika typer av förväntningar om sammanhang och avsikt. Det är klart att vårt språkliga sätt att fungera på modersmålet till stor del har överflyttats till matematikens språk. Men de matematiska betydelserna är mer fjärran. Vi kan säga ”Detta är en ko,” och peka på en ko. Matematiska betydelser kan däremot inte anges *ostentativt* – medelst pekning. Det är bara möjligt att peka ut exempel, generaliteten kan inte pekas ut. Kvar blir ett nödvändigt antydande. För att det ska bli kött behövs poesi, metaforer, djärvhet och strikthet.

Är matematiken rigid eller flexibel?

Man uppfattar lätt matematiken som färdig och opåverkbar. Men samtidigt vet vi att den har utvecklats gradvis, i ett ständigt prövande. Bakom varje färdigt matematiskt resultat finns det tusentals annorlunda versioner som kasserats. De ligger hopskrynklade i matematikernas gigantiska papperskorgar, som är väl dolda för offentligheten. Denna diskrepans i offentlighet motsvarar diskrepansen mellan matematikens uppfattade stelhet och flexibilitet. Hur stor är den frihet som vetenskapsmannen/tänkaren har? Matematiken är inte stel, fix och färdig. Den är tvärtom ytterst flexibel och utvecklingsbar i snart sagt vilken riktning som helst. Det finns alltså ett oändligt antal utvecklingsvägar. Vilka väljer matematikern? Jo, de som är resonliga – alla övriga kasseras. I *efterhand* är matematiken fix och färdig, när matematikerna undersökt vad som är kompatibelt med vad som redan finns och skrotat det andra. Åter till (Gyllensten 1991)! Här jämförs vetenskapsmannens frihet med friheten hos en människa som satts att lösa ett korsord – friheten är en chimär.

I själva verket är de många sätten att skriva samma sak (”objekten”) fundamentala för matematiken. Häri ligger hälften av teoretikerns frihet, men en skräckinjagande frihet. De flesta bevis består ju huvudsakligen av omskrivningar mellan olika ekvivalenta former. Utan de många representationssätten skulle påståenden inte kunna bevisas, alltså skulle matematiken inte ha några sanningar, alltså inte vara en vetenskap. Wittgenstein är känd för ”Det finns inga regler för hur man använder regler”. Att trots detta finna bra sätt att använda reglerna, som når målet, är teoretikerns jobb. Antalet sätt att idélöst kombinera matematiska argument är gigantiskt (detta är symbolhanterande program hänvisade till, och således ineffektiva). Många har försökt bevisa Fermats sats utan att lyckas. De har tappat orienteringen i denna ocean av omskrivningsfrihet, alternativt inte byggt tillräckligt starka farkoster. Många hittade andra nya världar. Men Andrew Wiles nådde just denna kontinent efter en nästan livslång resa på svårnavigerade hav (se Singh 1995).

Andra hälften av teoretikerns frihet är friheten att uppfinna nya räknesätt och tänkesätt som inte redan finns i den matematiska tankebyggnaden.

Symbolspråkets roll för matematiken

Från 1500-talet och framåt ersattes successivt den retoriska matematiken med en symbolisk. En rät linje blev en ekvation snarare än ett begrepp som kan representeras med ett streck på ett papper. Matematikens formelspråk har en oerhörd betydelse för vad vi anser att matematik är idag. Det har minst tre viktiga effekter:

1. *Tankeeffektivitet*. För det första har vi den stenografiska effektiviteten. Språkets framgång visar att matematiskt tänkande kan vara åtskilligt snabbare än vad ett retoriskt uttryckssätt tillåter. Robert Recorde uttryckte sig på följande sätt i sin bok *The Wetstone of Witte* när han 1557 introducerade det likhetstecken som vi är vana vid (Kaplan 1960):

   > To avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of parallelles, or Germowe lines of one lengthe, thus: because noe .2. thynges, can be moare equalle (Robert Recorde 1557, citerat ur Kaplan 1960, s x).

   ”Germowe” betyder tvilling. Nog är de två linjerna i ett likhetstecken synnerligen lika. Efter lång tid blev Recordes symbol den allmänt använda. Han introducerade således en ren *översättning* av ett uttryck på engelska till en ny symbol.

2. *Gemensamt internationellt språk*. Det andra stora argumentet för symbolspråket är att jordens kulturer fick tillgång till ett *gemensamt* språk att uttrycka matematiska kvantiteter. Vi fick ett internationellt språk för matematiska idéer. Detta har en enorm social betydelse för matematikens tillväxt, som kanske är större än tankeekonomin.

3. *Öppnandet av vägen för datorprogrammeringsspråk*. Tillkomsten av programmeringsspråk för datorer vore oerhört mycket svårare om det inte redan hade funnits en starkt reglerad symbolskrift. Programmeringsspråken är till stor del dialekter av matematiska.

    Formelspråket har blivit karaktäristiskt för matematik, det ytligaste sättet att känna igen matematik. En text som saknar formler innehåller ingen matematik. Men saknar fyraåringar helt matematisk känsla? Nej, matematik är någonting mer än sitt språk. Det finns människor som syr matematiskt komplicerade lapptäcken, som de intensivt skulle förneka är matematik. Det är ju inga formler. Det liknar inte alls skolans matematik.

En kort historia om matematikens och logikens axiom

Under mänsklighetens historia har matematiken vuxit fram gradvis ur praktiskt räknande. Det visade sig så småningom att det var möjligt att betrakta räknandet i sig. Om man kan addition av 11 och 23 så kan man snabbt räkna fram att summan är 34, *utan* att ha 34 objekt framför sig, och räkna på fingrarna till 34.[1] Det är en kraftig tidsbesparing, som för den icke initierade framstår som magisk. Det är en tidig version av symbolernas karaktäristiska dubbelhet: samtidig tankeeffektivitet och mystifiering.

Denna dubbelhet gäller språk i allmänhet, men kanske specifikt för matematik, av två skäl. Matematiska formler är en sorts mentala maskinerier – de svarar mot mentala upprepningsbara operationer där siffror kan skickas in och behandlas enligt vissa algoritmer (som senare ”elektronhjärnor” kunde utföra), vilket ger dem en särskild effektivitet. Samtidigt aktar sig matematiken noga från att behandla annat än särskilt enkla och stiliserbara sidor av vår observerade verklighet. Den behandlar det uppenbara, i någon mening.

Symbolerna är mycket kraftfulla för de som kan dem, men utestänger de som inte kan dem. Som vi kommer att återkomma till hör det till sakens natur att de som behärskar symbolerna har svårt att se denna svårighet. Detta är helt normalt ur lingvistisk synvinkel.

För att studera språket behövs särskilda hjälpmedel. Man kan inte betrakta sina ögon utan en spegel.

Axiomens problem: de är alltför självklara

Ett problem med många matematiska axiom är att de är alltför självklara. Då är det gåtfullt varför de formuleras. Man kan verkligen undra vad syftet är bakom påståendet ”ett äpple är ett äpple”, liksom kanske bakom att ”$x + y = y + x$”. Men detta är en del av matematikens speciella natur. Matematiken har behov av att formulera även det självklart sanna. Karaktäristiskt för symbolisk matematik är att man överger tolkningarna och förlitar sig enbart på räknereglerna. Symbolerna får stå för vadsomhelst, som uppför sig som räknereglerna. Detta är en sorts naturlig generalitet. En öppenhet mot nya tolkningar.

Om vi vill ignorera betydelserna och förlita oss på räknereglerna måste vi veta precis vad vi kan göra och inte göra – vad som är axiomatiskt sant. Både det som i tolkningarna är självklart och det som är mindre självklart. Vi vill ha tillgång till så många – men korrekta – räkneregler som möjligt. Detta tvingar matematikerna att formulera det självklara.

Man kan kort säga att *algebra* är den gren av matematiken där man undersöker vilka konsekvenser en viss uppsättning räkneregler får. Om vi har *dessa* regler för våra objekt (som inte är stort mer än symboler, som vi kan ersätta med diverse innehåll), vad vet vi då säkert? Vilka satser har vi? Om vi tar bort en regel, vilka satser faller bort? Samtidigt ökar antalet tillämpningar, deras generalitet. Om vi lägger till en regel kan vi visa fler satser, men får samtidigt resultat som är mer speciella, med färre tillämpningar.

Distributiva lagen – en naturlag?

Det är inte svårt att motivera att matematikens axiom gäller, i varje fall axiomen för talen (dock kanske varför de behöver formuleras). Exempelvis är det lätt att motivera en räkneregel som $x(y + z) = xy + xz$. Den kallas ju distributiva lagen, eller att bryta ut ur parenteser (←) samt att multiplicera in i parenteser (→) (det är den enda lag som innehåller båda räknesätten – den anger hur de samverkar). Om man har sju påsar med tre äpplen och 10 päron i varje påse, så kan man antingen räkna antalet frukter ($7 \cdot 13$) eller summera antalet äpplen och antalet päron ($7 \cdot 3 + 7 \cdot 10$). Det borde bli samma sak, även med andra sifferuppgifter. Det är ett självklart axiom, i alla fall för positiva heltal. Generalisering till större och mer abstrakta talmängder görs alltid (om möjligt) så att räknereglerna fortfarande gäller, det är en konstruktionsprincip.

Men samtidigt *antar* vi att detta gäller även om vi istället har 15 äpplen och 3794 päron i var och en av de sju påsarna. Hur vet vi det?

Man skulle ju kunna svara att det är så matematiken är konstruerad. Det är ett fundamentalt svar med tanke på att vi antar att $x(y + z) = xy + xz$ gäller i ett oändligt antal fall. Vi kan aldrig kontrollera samtliga fall.

Men detta svar räcker inte för att matematiken ska vara relevant. I samtliga fall som vi har kunnat kontrollera (och anser att lagen är tillämplig i) stämmer den dock med praktiken. I och med denna typ av observation föddes matematiken. Det är tydligen möjligt att bygga något generellt och formellt som har en implicit relevans.

Detta beskriver vårt mänskliga tänkande i lika hög grad som verkligheten omkring oss. Människor har en förmåga att räkna mentala objekt som om de vore fysiska. Matematiken är denna förmåga. För denna spelar mänsklig kommunikation en mycket stor roll, återigen något som knappast syns i dess resultat, i efterhand.

Trots denna självklarhet motiveras axiom sällan i läroböcker. Vanligen görs de grundläggande räknereglerna tillgängliga utan vidare kommentarer. Däremot ges exempel på tillämpningar av räknandet.

Axiomen är matematikens kontaktyta med verkligheten. Härifrån kan intuitionen fylla formalismen med liv, om man respekterar elevers behov av logik. Genom att motivera axiomen får eleverna komma bakom kulisserna och se hur trollkarlen gör sina trick. Magin blir mindre, mognaden större.

Arvet från den instrumentella matematikpedagogiken

Läroböckernas attityd väcker frågan: vad karaktäriserar matematikundervisningens praxis? Ja, arvet från början på 1900-talet är fortfarande starkt, då undervisningen var starkt instrumentell. Man skulle lära sig kunskap för att kunna sköta en samhällelig uppgift. Det var acceptabelt att ignorera elevers självständiga tänkande, att försöka forma (osjälvständiga) kuggar i samhällsmaskineriet. I en sådan anda ligger det mycket nära till hands att utnyttja de genvägar som matematiken erbjuder. Här finns alla möjligheter till oreflekterat räknande som ändå ger rätt svar. Så: träna på formelspråket, och lär dig räkna allting så det blir rätt. Att grubbla på vad räknandet betyder leder till osäkra och förvirrade funderingar som inte ger några tydliga resultat. Det bara konsumerar tid, som kan användas bättre till att räkna vidare.

Idag försöker vi ta oss ur detta ignorerande av elevers och studenters personligheter och egna utgångspunkter. Vi har dock inte kommit så långt i praktiken, kanske på grund av att vi inte har lyckats klarlägga dess mekanismer, vilka är starkt knutna till matematikens karaktär. Vi har fortfarande en rådande instrumentell undervisningspraxis, som emellertid är under belägring.

Att många skilda matematiska uttryck betyder samma sak framhålls inte särskilt ofta i matematikböcker. Om dessa uttryck till äventyrs betyder *olika* saker framstår en oerhört mycket större komplexitet för den oinvigde. Att förklara *varför* ingår inte i en instrumentell praxis, i vilken man nöjer sig med räknandets korrekthet. I vår seninstrumentella tradition saknar vi verktyg för detta i den mån vi avstått från att söka oss fram längs sådana vägar.

Logikundervisningens motsägelser

Låt oss ta ännu ett exempel. Det finns inte många ämnen där undervisning är så självrefererande som undervisning av logik. Man undervisar logisk argumentation med logisk argumentation. Vi har två nivåer av logisk argumentation, en objektnivå och en metanivå. För läraren är metanivån central, det är här man förklarar logiken. På objektnivån studerar man sanna och falska påståenden. Falska påståenden är ibland mycket viktiga, exempelvis för motsägelsebevis (som har konkreta vardagliga motsvarigheter). Men de är inte intressanta på metanivån. Man vill inte i någon kurs lära ut falska sanningar.

Detta blir ännu mer säreget eftersom att alla människor har en ytterst långtgående praxis i logik, vilket man inte har i sifferräkning eller någon annan matematik eller teori. Det är ju faktiskt ovanligt med mänskliga samtal som är fria från logik. Vi är alla vältränade i logik.

Detta innebär att elementär logik till stor del är nya symboler för välbekanta resonemang – en språkkurs. Det innebär samtidigt ett skärskådande av hållbarheten av vardagliga argumentationer, något som har ett klart demokratiskt och kommunikativt värde.

Emellertid ignorerar sällsamt nog dagens – fortfarande instrumentella – undervisningspraktik (som den uttrycks i läroböckerna) denna logiska praxis, bortsett från spridda exempel. Det förefaller som om formell logik inte har mycket att göra med vardaglig logik. Detta kan tolkas som en ospråklig attityd enligt mottot: är symbolerna olika, så är innehållet olika. Det skapar illusioner om svårigheter som inte finns.

Således: matematikens axiomatiska grunder har prövats mot verkligheten, liksom den logik som används att bygga matematiken. Om båda är formade och prövade av praktisk aktivitet, då kan man verkligen kalla matematiken stiliserad verklighet. Det vore då egendomligt om den så fort den inte är direkt tillämpbar tar en annan riktning än verkligheten.

Symbolspråket skymmer tillämpningarna

Matematik har startat som formuleringar av det som är generellt med kvantitativa kalkyler, av räknande i flera *olika* sammanhang, som liknar varandra. Om de liknar varandra är det praktiskt att formulera detta räknande oberoende av de skilda sammanhangen. Tre äpplen, tre människor och tre stjärnor har något gemensamt: dess ”trehet”. Ett begrepp som vi brukar beteckna med symbolen ”3”. Vi är alla mycket vana vid denna symbol, men är det samma sak som att vi förstår dess innebörd?

Symbolerna är inte godtyckliga. De har specifika historiska ursprung. De påverkar tänkandet. Exempelvis är symbolen för 3 i dövas teckenspråk tre fingrar. Denna symbol inbjuder till fortsatt räknande på fingrarna upp i hög ålder. Man kanske avstår från att lära sig att 3 + 5 är 8, eftersom man räknar på fingrarna. Det ger begreppet ”trehet” en annan valör.

Om man alltid formulerar räknandet i termer av äpplen kan man tro att det bara gäller äpplen, vilket inte är sant. Det är därför rimligt att välja en tillämpningsneutral formulering. I symbolen ”3” eller ordet ”trehet” kan man inte se några äpplen, människor eller stjärnor. Men då syns inte någon tillämpning längre. Detta understödjer myten om att matematiken inte har någonting att göra med tillämpningarna. Trots att det är tvärtom: det finns inte bara en utan många. De är gömda bakom de tillämpningsneutrala symbolerna.

Myten om matematikens oberoende får också näring från matematikernas praktik. De flesta arbetar helt oberoende av tillämpningarna, enbart i en matematisk begreppsvärd. Dessutom har matematiken sanningar, som inte behöver prövas med försök i verkligheten. Det är förvisso ett annorlunda sanningsbegrepp än i de flesta andra vetenskaper, som antingen kräver någon form av empiri eller har kluvits i olika konkurrerande skolor.

2. Matematiska, lingvistik och litterär form

Ett stycke nutidshistoria om studenter, matematik och matematiska

Vi hämtar härnäst ett lingvistiskt argument från ett debattinlägg i Sveriges Matematikersamfunds medlemsblad:

> Så småningom, efter möten med studenter år från år, växte denna hypotes fram: är det mattespråket som är det stora problemet för ett stort antal elever/studenter?

Och det visade sig att allting stämde! Vi matematiklärare har alltid förstått språket intuitivt, ty det gick bra för oss i skolan. För oss var språket inget problem, vi har aldrig behövt tänka på något språkproblem, *just därför är vi matematiklärare*.

Nästa argument är att man normalt inte tänker på språket i sig, man *använder det*. Man tänker på det man pratar *om* (innehållet), inte på språket självt, inte på orden och dess struktur. Men vi känner engelskans, tyskans och svenskans och andra språks grammatik? Varför? Jo, kulturmöten har pågått i tusentals år, inte minst i Europa. Arkeologer har konstaterat att det mesta av bronset i Sverige under bronsåldern var importerat, trots att det finns mycket brons i Norden. Tor och Oden-kulten har många likheter med romarnas gudar före kristnandet. Vi har haft kulturella möten (krig och handel) i Europa i åratal, *vi har mött språkproblem i åratal*. Vi har *tvingats förstå språks struktur* (inte bara dess innehåll) på grund av det absolut nödvändiga behovet av översättning mellan de många olika språken. Så småningom har översättningskravet också framtvingat språkkurser.

Är det naturligt att förstå språks struktur? Nej. Vid sex års ålder talar de flesta stora delar av sitt modersmål utmärkt, men har ingen aning om hur det fungerar.

Utan översättningskravet och de därifrån följande skolämnena skulle det inte heller senare i livet finnas anledning att lära sig språks uppbyggnad. Om alla människor på jorden talade samma språk skulle inga språkkurser förekomma, i skolan eller någon annanstans.

Men matematiken då? Jo, i detta sammanhang *saknas fullständigt konkurrerade språk*, det har aldrig funnits något. Det finns därför ingen anledning att studera språket *i sig*. Det har inte utvecklats någon beskrivning av matematikens säregna språk, ty det finns inget översättningskrav eller annan framdrivande kraft. (Nu finns pedagogikskälet, möjligen, men det är inte på långt när lika starkt.). Vi utvecklar inte något komplicerat för dess egen skull. Liksom vi inte upplever brist på något som inte finns.

Att många elever har ett stort språkproblem följer huvudsakligen från min egen och andras beprövade erfarenhet: vilka förklaringar som tycks göra det möjligt för studenter att komma vidare i matematiken. Studenter som man översätter för brukar bli lyckliga, de säger ofta något i stil med ”var det inget annat”. Och, enligt ovanstående argument, vi matematiklärare ser inte problemet just på grund av att vi är matematiklärare. För oss har det alltid varit självklart. Därmed är Moment 22 ett faktum. En slutsats, något värre än hypotesen:

> Många elever har ett stort språkproblem, men varken elever eller lärare ser problemet (Lennerstad 2003a, s x).

Filosofen Paul Ernest bekräftar språkets något paradoxala ”tysthet”. Syftande på ”matematikens underliggande språk”, skriver han:

> As with any language, knowing how to use it is to a large extent tacit (Ernest 1999, s x).

Ernest beskriver i samma artikel olika typer av tyst kunskap i matematik. I avsnittet ”Tre skilda typer av matematisk kunskap” i denna artikel föreslår jag tre kategorier av matematisk kunskap, vilka relaterar sig på distinkta sätt till matematiskan. Språkfilosofen Michael Dummet diskuterar i boken *Seas of Language* (Dummett 1996) frågor som ”Vad handlar matematik om?” och ”Vad vet jag när jag kan ett språk?”. I Tecken att tänka med (Sällström 1991) beskrivs, diskuteras och jämförs många typer av notation, bland andra den matematiska.

Som människor har vi alla en naturlig lingvistisk blindhet för vårt eget modersmål. Denna blindhet gäller också matematiska på grund av att den kontrast, som konkurrerande språk utgör, inte finns. Det finns ingen kontrast som tvingar oss att upptäcka detta språks struktur, liknande den som danska fiskare kan uppleva när de träffar franska fiskare på Nordsjön och vill prata väder, båtar och fisk. Matematiken tycks fungera utan översättningar. De som drabbas är de med svagast röst i sammanhanget: elever i skolan. Men de riktar snart sin uppmärksamhet i andra riktningar. De kanske väljer att uppfatta matematik som ett rollspel, ett sätt att uppföra sig, snarare än en vetenskap av prövbara sanningar (se avsnitt 4, ”Matematisk kommunikation mellan människor”).

Vad utvecklas vid mänskliga samtal?

En relaterad lingvistisk observation är att vid varje mänskligt samtal utvecklas två egenskaper/förmågor, medan en tredje inte gör det. Vi utvecklar den språkliga skickligheten (genom användning) och insikten om samtalets innehåll (genom utbytet, prövandet och formulerandet med språkliga medel). Men insikten om språkets struktur, uppbyggnad eller regler ökar inte. Så sker bara om språket är ämnet som avhandlas.

Det är mycket vi inte behöver vara medvetna om medan vi talar. Vi behöver inte heller tänka på hur vi ska röra stämbanden eller tungan vid talet, det går helt av sig självt. Språkets struktur är antagligen mera kulturell än biologisk, men ligger även den utanför gränsen för vad vi behöver vara medvetna om. En astronom ser helst stjärnorna, inte kikaren. Redskap och andra medel *används*, och studeras i sig bara om det krävs för användningens mål. Språk är vanligen medel, inte mål. Målen är de naturliga blickfången.

Om upptäckande av språklig struktur

Vårt modersmåls struktur kan vi lära oss genom att försöka förklara det för någon som har ett annat modersmål. Det är svårt för enbart svenskar att tillsammans lära sig förstå svenskans struktur – vi *behöver* icke-svenska perspektiv. Hur gör vi vid detta upptäckande? Jo, vi provar med vår ”inbyggda” språkliga förmåga, och reflekterar över vad vi själva säger. På just detta sätt kan vi också upptäcka det matematiska formelspråkets struktur. Genom att när vi använder det tillsammans med kollegor och studenter, tolka vår egen användning, och medvetandegöra oss själva.

Om upptäckande av matematiskans syntax – studenter behövs

Medvetandegörande av grammatiken är oftast poänglöst om matematiker samtalar. Innehållet är ”alltför intressant”, det attraherar uppmärksamheten från språkliga upptäckter, vilka är tämligen onödiga. Däremot behövs de med studenter som inte är naturliga matematiskatalare, just som vi behöver icke-svenskar för att upptäcka svenska. Således är dessa studenters verbaliseringar särkilt viktiga för oss.

Att ta den lingvistiska blindheten på allvar öppnar därmed möjligheter att i matematikämnet utöva respekt och erkännande av studenter som anstränger sig att förstå. De kan uppleva sig som spjutspetsar i utforskandet av matematiskans struktur. Studenters verbaliserade erfarenheter och reflektioner genom åren har för undertecknad spelat en stor roll för ”upptäckten av matematiskan”, och för många delar av denna artikel.

Några observationer om matematiskan

Esperanto är ett konstruerat språk. Det är konstruerat av en enskild person: den polsk-judiske läkaren Ludwig Zamenhof. Esperanto är tillverkat av komponenter i andra språk, mest europeiska språk. Språkets grammatik saknar undantag, och det finns något större frihet att göra egna konstruktioner än i naturliga språk (med prefix och suffix). Är matematiska ett konstruerat språk?

Nej, knappast. Matematiskans grammatik började som en version av naturliga språks grammatik, men har sedan dess utvecklats genom det egna innehållets dynamik (vilka behov matematikerna upplever). Språket är ej konstruerat av någon individ, det är framvuxet under en lång period i en specifik kultur: i en internationell vetenskaplig kultur. Det är inte alltid konsekvent, och det innehåller undantag, till skillnad från esperanto. Matematiskan är ett specialspråk, dess betydelser gäller inte alla livets områden utan ett särskilt område. Däremot är det tillåtet för en enskild användare att göra egna språkliga uppfinningar, som ibland avspeglar innehållsliga fenomen och ibland är till för att förenkla räknandet. Det kallas definitioner. De flesta möter matematiska i skolan, några gör det tidigare. Är detta åldrar då matematiska kan läras helt intuitivt, som modersmålet? Om man ser till hur elever använder matematiska, förefaller det som om språket är ett gränsfall, svaret är oftast nej men ibland ja.

I likhet med kinesiska kan matematiska uttalas på vitt skilda sätt, även om det skrivs på samma sätt. Likheten med kinesiska består i att tecken inte representerar fonem, som i europeiska språk, utan betydelser. Av detta skäl sker stavningsreformer ibland i europeiska språk (anpassning till uttalets förändringar), men inte i kinesiska eller matematiska. Till detta kan läggas att matematiska är speciellt genom att dess talspråkskaraktär är underordnad, det läses och skrives mer än det talas. Det kan till och med upplevas som ganska olämpligt som talspråk. Det är vanligt att man ger upp om man försöker beskriva matematiska formler per telefon.

I Östen Dahls bok *Språkets enhet och mångfald* (2000) beskrivs språks egenskaper och utvecklingstendenser från många perspektiv. Matematikern Warren Esty vid University of Montana, USA, ger särskilda kurser baserade på sin bok *The Language of Mathematics*. Den handlar om språkkomponenten i matematiken tillsammans med grundläggande logik och bevisföring. Studenter har beskrivit resultatet av kursen i termer av befrielse. Att de känner större kontroll över vad de sysslar med, och i högre grad kan ta aktiv del av matematisk verksamhet.

Matematiska texters form

Matematiska texter är alltid tvåspråkiga, både naturligt språk och matematiska förekommer med något olika roller. Det finns en dominerande litterär stil att placera förklaringsstyrkan i matematiskan, formlerna pekas ut av det naturliga språket. Man ska förstå främst genom att studera formeln ingående. En annan stil är att låta en formel ge en exakt kvantitativ version av något som redan förklarats på naturligt språk. I Lennerstad (2002b) och Lennerstad och Petterson (1999) prövas dialoger för matematisk framställning. Några skäl för dialoger är: identifikation (ofta studenters talspråk), olika åsikter kan lättare ställas mot varandra, kritiskt tänkande i matematik kan exemplifieras och levandegöras, och upptäckarglädjen kan i viss mån gestaltas. En dialog har naturligt ett driv, en spänning och en närvaro, som en monolog sällan har.

Ordet ”översättningar” är ett okänt ord i matematik. Detta kan bero på språkets sammansmältning med innehållet. Man upplever ingen skillnad mellan en formel och vad den betyder – formeln är innehållet (se Lennerstad & Mouwitz 2004). Matematiker arbetar med formler och upplever inget omedelbart behov av en sådan distinktion.

Semiotik är läran om tecken. Semiotik har fått en ökande betydelse i matematikdidaktik. Vid definition av tecken gör de Saussure en distinktion mellan ”the signified” (innehåll, objekt, idé) and ”the signifier” (tecknet), medan Peirce även talar om en tredje egenskap hos ett tecken. Det svarar mot vad som uppstår hos en läsare/mottagare av det (”interpretant”, se Engström 2002).

3. Tre skilda typer av matematisk kunskap

Anna och Bengt

Varför skulle det vara relevant att se språk och innehåll som två olika matematiska kompetenser? Det starkaste skälet skulle kanske vara att elever uppvisar sådana skillnader i sina sätt att lära sig, och i sina attityder till ämnet. Dock tycks ännu inte systematiska studier ha gjorts i just denna fråga. Är Anna och Bengt vanliga elever/människor?

– Anna lyckas lösa de flesta av de matematiska problem som är formulerade utan formler, med geometriska och andra kluriga sätt. Hon lyckas inte på proven, men lämnar ändå inte sitt sätt att tänka, för hon får en stark känsla av förståelse med den metod hon använder. Det är verkligen roligt att lista ut svaren.

– Bengt är skicklig i formelspråket. Han är intresserad och observant på hur formlerna fungerar och vad man kan göra med dem, och blir uppmuntrad av att han klarar proven bra.

– Anna har aldrig upptäckt hur man skriver formler. Hon tycker formelspråket är en helt onödig svårighet. Om hon försöker använda eller lära sig formlerna, så slutar hon så fort hon får möjlighet för att fortsätta med sina egna metoder, som hon tycker är mycket bättre.

– Bengt är ganska ointresserad av tolkningar och lästal. Han vet inte och behöver inte veta vad formlerna betyder. För honom är matematik samma sak som formelräkningar.

– Den matematiska intuition Anna har med sig till skolan använder hon och fördjupar hela tiden på mattetimmarna.

– Bengts matematiska intuition, som han har med sig till skolan, använder han kanske i vardagen, men inte i skolan. Hans ”skolmatte” och ”livsmatte” är isolerade från varandra.

Det är lätt att förväxla språkproblem med brist på kunskaper, eftersom kunskaper främst uttrycks med språk. Så skedde ofta innan dyslexi diagnostiserades. För Anna krävs lösningarna på ett främmande språk. Hon anser att det inte undervisas i detta språk, hon vet inte ens dess namn (matematiska). Hon tycker inte hon behöver det, utom på proven. Språket används bara. Man förväntas kunna det. Hon vet inte när man skulle lärt sig det.

Det kunde vara värdefullt om eleverna på vissa matematiktimmar i skolan inte alls måste skriva korrekt. Det handlar då endast om att övertyga någon annan, med alla möjliga medel – formler, svenska, dialog, teckningar, dans, musik.

På andra matematiktimmar uppmärksammas korrekt formelbehandling. Detta skulle kanske bättre ta vara på de matematikkompetenser som barn har och utvecklar. Anna skulle äntligen få sin skicklighet bekräftad av skolan. Detta motsvarar den tidigare indelningen av svenskaämnet i litteratur och språk.

Översättningar matematiska–svenska

Det är i detta sammanhang som de främsta syftena med *översättningar* mellan matematiska och svenska hör hemma. En översättning av en formel är en förklaring som följer en specifik formel ord för ord, tecken för tecken.

Exempel: logaritmlagen $\log xy = \log x + \log y$ (som gäller om x och y båda är positiva).

Matematiska: $\log xy = \log x + \log y$.

Svenska, 1: Logaritmen av en produkt är summan av logaritmerna.

Svenska, 2: Logaritmen (”log”) av en produkt av två tal (”xy”) har alltid samma värde (”=”) som summan av (”+”) logaritmerna av de två talen var för sig (”log x” och ”log y”). Eftersom de alltid har samma värde kan man alltså själv bestämma på vilket sätt man vill skriva.

En översättning kan gärna följas av ytterligare en förklaring av innebörd, eller vilka kalkylmöjligheter den ger. Man kan observera att matematiska och svenska inte har riktigt samma ordföljd: ”a + b” svarar mot ”summan av a och b” (direktöversättning: ”+ a b”).

Regelbundna översättningar har minst fyra viktiga poänger:

1. Översättningar kan på konkreta (outtröttliga) sätt knyta samman intuition med formler. Då kan formlerna ”smittas” av intuitionen, och bli laddade av emotionellt kunskapsinnehåll, av bilder och matematisk känsla. Bengts två matematiska kompetenser kan börja hänga ihop.

2. Detaljerade översättningar förklarar formelspråkets struktur, exempel för exempel. Man lär inte en hel grammatik för matematiska, utan vad som faktiskt dyker upp. Anna kan börja se matematiska som ett användbart alternativ till svenska.

3. Formelspråkets formidabla effektivitet kan inte undgå någon i längden.

4. Termen ”översättningar” associerar till något många elever inte tycker är så svårt – lärande av språk. Det är en öppning för matematiken. Sådant lärande ökar givetvis förutsättningarna för lärande av matematiskt innehåll.

Om ords betydelser

Ord eller uttryck på ett språk *representerar* naturligtvis något annat (se Dahl 2000). Om någon säger ”stol” tänker man i första hand på ett föremål med fyra ben avsedd att sitta på, och inte på ordet ”stol” och dess stavning. Men vad representerar 2 + 3? Vad är matematikens semantik?

Ord som ”mössa”, ”hår”, ”festival” har en gemensam social ordboksinnebörd, men väcker också för olika människor skilda associationer. Det är olika typer av innebörder. Här är några skilda sätt att ange innebörder för ordet ”mössa”.

1. (fysisk specifikation) Ett mjukt föremål, utvändigt något större än övre halvan av ett mänskligt huvud, invändigt lika stort, oftast tillverkat i tyg.

2. (typisk aktivitet) Bärs på huvud vid kallt väder.

3. (effekt) Värmer huvudet.

4. (syfte) Undvika att en person fryser eller blir sjuk på grund av kyla, eller att undvika utfrysning i sociala miljöer där det är oacceptabelt att inte bära mössa.

Men det finns också gott om mer personliga innebörder. Det finns religiösa och andra betydelser för vissa mössor, som associativt kan ha smittat av sig på vanliga mössor.

Innebörden hos matematiska begrepp kan specificeras på liknande sätt, men det ostentativa, utpekning, saknas (Lennerstad & Mouwitz 2004). Detta beror på matematikens generalitet – man kan peka ut exempel, men i dessa fattas just generaliteten. Sådant utpekande är en början på uppbyggande av matematiska begrepp.

I bristen på ostentativ definition får de andra sätten att formulera innebörder större betydelse. Matematikens skolkultur har ofta övergivit innebörderna, man tar fasta på symbolerna i sig. Symbolerna blir innehållet. De blir objekt för skilda kalkylmetoder. Här kan en intuition utvecklas som gäller formler och deras användning oberoende av deras tolkningar – en formelintuition.

Tre kunskapstyper relativt matematiskan

Med utgångspunkt i matematiskan kan man tala om tre typer av matematisk kunskap. Alla tre innehåller olika kvaliteter av kunskap: explicit (formulerad), implicit (formulerbar) och tyst (kanske ej formulerbar). I Spelregler – om gränsöverskridande finns en dialog som belyser tyst kunskap på mångsidiga sätt (Göranzon 2001, s 47).

1. *Meta-matematik – matematiska kalkylmetoder* (”över” matematiskan). Vi har en uppsättning regler – hur är det möjligt att använda dessa för att genomföra en kalkyl som ger önskat resultat? Denna kunskap är helt central för matematiker och för alla andra matematiska problemlösare. Den nämns i förbigående i böckerna, huvuddelen är sannolikt tyst kunskap.
   Metoderna demonstreras ofta utan ord, ty de ord som förekommer är del av metoden, och inte av metodens förklaring. Denna kunskap kan sällan datorprogrammeras, endast där det finns tydliga algoritmer. Det svarar mot forskningsområdet ”automated theorem proving”. Datoriserade lösningsmetoder är sällan effektiva, ty total genomsökning av alla möjligheter är en långsam metod även med superdatorer. Denna kunskap kräver fantasi, och representerar den mänskliga hjärnans förmåga till framgångsrikt icke-algoritmiskt tänkande.

2. *Matematiskans grammatik* (på matematiskanivå). Denna kunskap är den lingvistiska kunskapen att kunna använda matematiskans regler korrekt. Det är matematiskans grammatik, där vi bortser från innebörderna. Denna är som nämnts tidigare i hög grad outtalad, kräver inte fantasi, och är datorprogrammerbar. Vissa regler är rena skrivkonventioner, andra är sanningar som används som grammatiska regler.

3. *Formlernas innebörder* (kunskap ”under” matematiskan). Här finns matematikens ursprungliga och nya tillämpningar, som är explicit kunskap. Men här finns också innebörder i mer omedelbar, personlig och metaforisk mening, som de matematikaktivas bilder och associationer (se de möjliga definitionerna av innebörden av ”mössa” ovan). Denna typ av innebörder är ofta tyst kunskap på grund av att matematikverksamhet inte så ofta verbaliseras. Den kan ge analogier och förslag till kalkylmetodkunskapen.

Här är exempel på kunskaper av dessa tre typer angående sifferräkning:

1. *Över matematiskan* (hur regler kan användas). Betrakta additionerna 2 + 7 = 9, 1 + 8 = 9 och 12 – 3 = 9. Att ”räkna ut en addition” är att skriva den som ett enda tal, utan något plustecken. Varför? För det är oftast det enklaste skrivsättet. På en linjal, exempelvis, står det ”9” och inte ”2 + 7”, så här är givetvis ”9” mer praktiskt. Alla dessa exempel, 2 + 7, 1 + 8, 12 – 3 och 9 är emellertid olika sätt att skriva samma tal. Ibland kan man även behöva arbeta åt andra hållet (från 9 till 12 – 3). Eftersom det är samma tal har man faktiskt stor frihet, även om det kanske inte känns så eftersom den uppgift som ställs nästan alltid är att räkna åt ena hållet.

2. *På matematiskanivå* (regler). En addition kräver två tal, på var sida av ”+”, det är en så kallad binär operation. Vi kan ha vilka tal som helst på ömse sidor. Hela additionen (två tal på ömse sidor om ”+”) kan behandlas som ett enda tal även innan det är uträknat, det är exempelvis tillåtet att dividera med en addition (1/9 och 1/(6 + 3) är lika tillåtna). På samma sätt är 3 + (4 + 7) en addition, de ingående talen kan själva vara additioner. En parentes betyder endast att beräkningar inom parentes ska utföras innan vidare beräkningar.

   Även likhetstecknet är en binär operation. Likhetstecknet med sina omgivande tal eller additioner är inte ett nytt tal, utan ett påstående, som har ett av två värden: sant eller falskt. Vanligen arbetar vi med sanna påståenden, vilket, till skillnad från addition, inte tillåter vilka kombinationer av tal som helst till höger och vänster.

3. *Under matematiskan* (tillämpningar, metaforer). Additioner har tillämpningar överallt. Om man spelar fia med två tärningar får man ofta addera mindre tal. Man behöver addition för att beräkna antalet sittplatser om en klass och alla klassens lärare ska äta middag tillsammans, eller hur många Volvobilar som finns i lager i Sverige just nu, om man känner till antalet bilar i varje lager. Tiokamraterna är tal som tillsammans har summan tio. På samma sätt är 41 och 59 hundrakamrater.

Denna indelning i kunskapsformer utgår från det tydligaste och mest specificierbara i matematiken: dess symbolspråk. Detta är viktigt för en stabil och väldefinierad karaktärisering. Det finns flera typer av matematisk kunskap än dessa tre (se även Ernest 1999). En av mycket få böcker som fokuserar den första typen av kunskap är George Pólyas bok *How to Solve It* (Pólya 1957). Den har blivit en klassiker.

4. Matematisk kommunikation mellan människor

Klassrumskommunikation i matematik

Madeleine Löwing skriver i den avslutande diskussionen i sin matematikdidaktiska avhandling (Löwing 2004) under rubriken ”Implikationer för lärarutbildning och fortbildning”:

> Under de observerade lektionerna visade sig lärarna ha stora problem med att nå eleverna med sina förklaringar. De flesta av dem saknade ett språk med vars hjälp de kunde presentera ett innehåll utgående från elevernas individuella behov och förmåga att lära. […] Det gäller då inte bara användandet av ett korrekt och för eleverna uppfattbart språk. Det gäller i lika hög grad att kunna ta elevers perspektiv och strukturera sina förklaringar på ett för eleverna logiskt sätt, att kunna gå från det konkreta till det abstrakta. Men inte heller detta räcker. Lärare måste ta ett större ansvar för elevernas språkutveckling (Löwing 2004, s 270).

Tydligare kan det knappast sägas att även i matematik handlar undervisning om möten mellan människor: om förmågan att ta en annan människas perspektiv. (Respekt för människor kan emellertid också innebära att *låta bli* att ta på sig en annan människas perspektiv i vissa avseenden, till exempel om det gäller frågor som är för långt från yrkesrollen eller ämnet.) I matematik är språklig medvetenhet särskilt viktig för kommunikationen eftersom modersmålet, människors främsta kommunikations- och tankemedel, är satt på undantag. Det är placerat där av matematiskans oreflekterade dominans.

I Alrö och Skovsmose (2004) beskrivs olika typer av dialogiska aktiviteter i ett matematikklassrum, och dess kvaliteter.

Det matematiska rollspelet – klassrumsformen

Ett framträdande tema i den polske författaren Witold Gombrowicz' författarskap är Formen. När människor möts känner vi oss tvingade att uppträda på ett visst sätt, vi känner en Form, (ett oöverblickbart system av förväntningar?) som tvingar sig på oss. Formen existerar mellan oss. Vi kämpar mot den och försöker frigöra oss från den, men vi skapar oundvikligen ny form. Gombrowicz' ((medvetet) problematiska) stridsrop är: Autenticitet! Finns det något som inte är förställning? Låt oss prova att underminera orden med ord, så kanske vi bakom bråten och dammet kan skönja Något Annat.

När matematik står på schemat gäller en mycket speciell klassrumsform. Hur bör man uppträda? Vilka frågor kan man ställa? Hur ska man försöka tänka? Det är naturligt att försöka absorbera det matematiska rollspelet, för att kunna uppfylla det. För att kunna göra erforderliga kalkyler och emotta bekräftning på det. För många kanske detta är matematiken.

De matematiska förväntningarna kan upplevas som monumentala. Hur kan jag, en elev, ställa frågor som tycks ifrågasätta halva kulturen och tusentals mattesnillen under flera hundra år? Det är svårt med självständigt tänkande i matematiken. En helt annan situation uppstår för eleven om vi lärare är fräcka och tillåter oss att ifrågasätta och kommentera matematiska sanningar. Att bryta rollspelet, att bejaka de frågor som elever ställer till sina kompisar eller till vaktmästaren. Autenticitet! Läraren kanske av elever upplevs som rollspelets främste övervakare, snarare än kunskapens.

Matematiker anser att matematiken i högsta grad är prövbar kunskap, medan elever kanske förväxlar en viss typ av skolbeteende med att behärska matematik. Matematiker underskattar ofta de år av träning som alla måste genomgå för att överhuvudtaget kunna tolka matematiska uttryck, och kunna ställa frågor som har någon mening i denna kultur. Matematiken lever och fungerar i en högst speciell praxis, som kräver mycket skolning för att man ska bli tillhörig (se Johannessen 1999 och Wittgenstein 1956).

Metaforisk matematik

Om läraren bryter rollspelet då kan effekten (befrielsen?) bli desto kraftigare. Det kan ge en filosofisk diskussion i matematikklasserna, på alla tre nivåerna av kunskap. Matematiken upplevs aldrig så hållbar som när den visar sig tåla ifrågasättande och beskjutning från många skilda håll. Orimliga förväntningar på matematiken kan också avskrivas, men först när de verbaliserats. I artikeln ”Matematik som filosofiämne” (Lennerstad 2004) diskuteras sådana filosofiska möjligheter. Den ger också en lång informell beskrivning av derivatabegreppet, på en fråga väckt av Marie Tängdén och Sara Wallner. I Tängdén och Wallner (2003) efterlyste de mer än en kortfattad formell beskrivning av detta begrepp, vilket är en mager utgångspunkt för elevers reflekterande.

En matematikkarta är en global matematisk metafor. Matematiska begrepp ger namn till floder, hav, sjöar, berg, länder och städer, på sätt som kartritarna anser svarar mot begreppens sammanhang (se Lennerstad & Larsson 2003, Lennerstad & Selander 2004). Det visar sig att den vanliga klassrumsformen är som bortblåst så fort elever intresserat sig för denna kartritningsmöjlighet. Det blir möjligt för elever att *uttrycka* år av räknande, att formulera betydelser av vad man länge sysslat med. Många elever uppskattade de skilda åsikter om sammanhangen som visade sig, och processen att ena sig i en gemensam karta. Titeln på den första delen av verket (Davis & Hersh 1995) är mycket riktigt ”Det matematiska landskapet”.

Matematikers dialoger har ofta informell och ifrågasättande karaktär. Inte sällan missbrukas notationen, tillfälligt. Matematiska dialoger i skolan kan sannolikt minska klyftan mellan skolkultur och forskningskultur. I en rapport av Mats Martinsson och Inger Wistedt (1994) finns ett lysande exempel där 11-åringar från sina utgångspunkter med liv och lust engagerar sig i forskningslika matematiska dialoger om en oändlig decimalutveckling. Ett vanligt utrop var ”Här fick man verkligen tänka!”, kanske i motsats till de vanliga matematiklektionerna. Detta kan tolkas som en implicit definition av ordet ”tänka”, nämligen av upplevelsen att man själv har frihet att söka vägar att nå målet. I denna tolkning är följandet av en i förväg preparerad rutt av tankar kanske en mental aktivitet, men inte tänkande. För att rubriceras som ”tänkande” tycks barnen kräva ett visst mått av egen frihet och valmöjlighet, självbestämmande, personlig närvaro och ansvar.

Är språklig medvetenhet ännu en pålaga på lärarna? Ännu ett krav som redan överbelastade lärare bör ta hänsyn till? Kanske, men ett krav som kan tolkas som ett anti-krav. Den tidigare mycket centraliserade skolan med återkommande pedagogiska reformer har tränat läraren att se sig själv som ett verktyg för pedagogiska idéer, och kanske i hög grad tona ner egna idéer. Pålagan är i så fall att minska pålagorna. Autenticitet!

Matematikens problem: instängdheten i matematiskan

Om man sätter likhetstecken mellan matematik och formelmanipulation är matematik en högst speciell och tämligen isolerad vetenskap.

Om man ser matematik som betydligt mer än formelmanipulation så är matematik fortfarande en högst speciell vetenskap. Men då framträder de intima kopplingarna till snart sagt alla andra vetenskaper. Till naturvetenskap (matematikens inspirationskällor), till språkvetenskap (formelspråkets centrala och självständiga roll), till konst och musik (metaforiskt problemlösningstänkande), till psykologi (självkänsla i det egna tänkandet, hur tänker jag egentligen?), till filosofi och vetenskaplig argumentation (vilka argument kan vi lita på, och varför kan man det?), till demokrati och samhällskunskap (kan jag respektera andras ”felaktiga” åsikter i matematik, om jag vet?). Det är karaktäristiskt för fria dialoger om matematik att de överskrider matematikens traditionella gränser. I Mouwitz (2004) ges många perspektiv på vad bildning kan betyda i matematiksammanhang, inte minst i form av dialoger som fria samtal.

Här finns matematikens hopp för framtiden. Lärare och elever som vågar försöka formulera sig själva. När man gör det bryts matematikens instängdhet i det egna fenomenala och förföriska symbolspråket – matematiskan.

Brist på språklighet avspeglar en icke-kommunikativ vetenskapssyn

Bristen på språklighet reflekterar en kvarvarande grundsyn på vetenskap som inte primärt handlande om kommunikation, utan om Sanning. I detta icke-kommunikativa perspektiv är vetenskapen inte vad människor kan enas om, finna gemensamt, utan vad som är sant, oberoende av det mesta. Gärna även oberoende av mänskligheten, trots att det är vi och inga andra som formulerat den, enligt våra synsätt, traditioner och fattningsförmågor. I denna tradition är en vetenskaplig text inte en tänkt kommunikation, ett försök att kommunicera idéer och uttömmande argumentationer till andra som sanning alternativt förslag till sanning. Den är gjord för en ensam läsare att inhämta Sanningen.

Det är ett tilltal som tenderar att degradera läsaren. Att fixera denne som lyssnare, och inte som prövare. Vetenskapen, med sina undantagslösa naturlagar, har fortfarande drag av sin historiske föregångare och inspiratör, den allsmäktige guden. Vetenskapsmän spelar reflexmässigt rollen som Sanningens osynliga uttolkare. Reflexmässigt, ty den anonyme författaren är de facto en del av dagens vetenskapskultur, och kultur liksom språk kan vi bara bli medvetna om i påträngande kontrast till något annat.

Not

1. I många andra språk än svenskan används olika termer för att beteckna olika typer av räknande. Att ”räkna fram summan” benämns till exempel på danska för ”rejne”, medan att ”räkna på fingrarna” benämns ”tælle”.

Referenser

Alrö, Helle & Skovsmose, Ole (2004): Dialogic learning in collaborative investigation, *Nordisk Matematikkdidaktikk*, *9*(2), s 39–62.

Bergsten, Christer (1999): From sense to symbol sense. I Inge Schwank, red: *European Research in Mathematics Education, Vol II*, s 123–134.

Björck, Staffan (1963): *Romanens formvärld*. Stockholm: Natur och Kultur.

Dahl, Östen (2000): *Språkets enhet och mångfald*. Lund: Studentlitteratur.

Davis, Philip J & Hersh, Reuben (1995): *The Mathematical Experience*. Boston-Basel: Birkhäuser.

Dummet, Michael (1996): *Seas of Language*. Oxford: Oxford University Press.

Engström, Arne (2002): Semiotik och matematikdidaktik. I Christer Bergsten & Barbro Grevholm, red: *Challenges in Mathematics Education*. Proceedings of MADIF3. The 3rd Swedish Mathematics Education Research Seminar, Norrköping, 23–25 januari 2002. Skrifter från Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning, 2, s 84–95.

Ernest, Paul (1999): Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: philosophical and rhetorical perspectives, *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1–3), s 67–83.
Esty, Warren (2000): *The Language of Mathematics*. Missoula, MT: University of Montana, Department of Mathematical Sciences.
Gombrowicz, Witold (1937): *Ferdydurke*. Stockholm: Bonniers.
Gyllensten, Lars (1991): Möjliga världar – en kör av en mångfald själar, *Dialoger* (Matematik och bildning), (18–19), s 27–49.
Göranzon, Bo (2001): *Spelregler – om gränsöverskridande*. Filosofi och ingenjörsarbete IV. Stockholm: Dialoger.
Jacobsson, Calle & Elvin-Nowak, Ylva (1994): *Kvinnor i matematiken – ett trevligt inslag eller på lika villkor?* Stockholm: Rådet för grundläggande högskoleutbildning.
Johannessen, Kjell S (1999): *Praxis och tyst kunnande*. Filosofi och ingenjörsarbete III. Stockholm: Dialoger.
Kaplan, E (1960): *Robert Recorde (c. 1510–1558): Studies in the Life and Works of a Tudor Scientist* (PhD Thesis) New York: New York University.
Lennerstad, Håkan (2002a): Matematikutbildning och matematikens två komponenter: innehåll och språk, *Svenska Matematikersamfundets medlemsblad*, no 3.
Lennerstad, Håkan (2002b): *Envariabelanalys med dialoger*. Ramdala: Förlaget Kärret.
Lennerstad, Håkan (2004): Matematik som filosofiämne, *Nämnaren*, *31*(2), s 14–19.
Lennerstad, Håkan & Larsson, Krister (2003): Matematikkartor, *Nämnaren*, *30*(3), s 22–27.
Lennerstad, Håkan & Mouwitz, Lars (2004): *Mathematish – a tacit knowledge of mathematics*. Proceedings of MADIF4. The 4th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Malmö 21–22 januari 2004.
Lennerstad, Håkan & Pettersson, Eva (1999): *Läroböcker bör vara student–lärardialoger*. Proceedings från Kvinnor och Matematik 4, Uppsala, 16–18 april 1999.
Lennerstad Håkan & Selander, Mia (2004): Klass 9A:s matematikkarta, *Nämnaren*, *31*(2), s 24–29.
Löwing, Madeleine (2004): *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare–elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg Studies in Educational Sciences, 208.

Martinsson, Mats & Wistedt, Inger (1994): *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling*. Stockholm: Stockholms universitet, Pedagogiska institutionen.
Mouwitz, Lars (2004): *Bildning och matematik*. Högskoleverkets rapportserie 2004:29 R. Stockholm: Högskoleverket.
Pólya, George (1957): *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
Singh, Simon (1998): *Fermats gåta*. Stockholm: Norstedts förlag.
Sällström, Pehr (1991): *Tecken att tänka med*. Stockholm: Carlssons förlag.
Tängdén, Marie & Wallner, Sara (2003): Elever skriver om matematik, *Nämnaren*, *30*(4), s 43–46.
Winslöw, Carl (2004): Semotics as an analytical tool for the didactics of mathematics. *NOMAD, 9*(2), s 81–99.
Wittgenstein, Ludwig (1956): *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Cambridge, MA: MIT Press.