

# Allmänbildning i matematikundervisning i ett demokratiskt samhälle

*Günter Graumann*

For Dewey a democratic society is characterized by the well-balanced participation of its members in all its goods and important matters. Mathematics education can help to develop an appropriate way of thinking according to such a view of democratic life from two different aspects: the culture of instruction and the general goals of mathematics education. However, the “swotting up” of computation and training of algorithms contradicts such a culture of instruction; the pupils should instead get the opportunity to develop their own ideas and to work together on problems. The teachers have to mediate the sense of learning mathematics. The general goals of mathematics education can be seen in four different dimensions: enlightenment (understanding the world, becoming orientated in the world), pragmatism (usefulness for everyday life, preparation for future life), personality (individual abilities, personal identity), sociality (living in a community, cooperation and communication, responsibility). Comments and examples of mathematics education in respect to these dimensions are given in the article.

## Inledning

1916 skrev John Dewey:

Ett samhälle som ombesörjer att alla dess medlemmar på lika villkor får del av dess förmåner och som tryggar en flexibel anpassning av dess institutioner genom interaktion med de olika formerna av samhällsliv är så till vida demokratiskt. Ett sådant samhälle måste ha en typ av utbildning som ger individerna ett personligt intresse för sociala relationer och kontroll, och intellektuella vanor som gör det möjligt att genomföra sociala förändringar utan att oordning uppstår (här ur Dewey 1916/1999, s 140).

När vi så ställer oss frågan om och på vilka sätt matematikundervisningen kan spela en roll i relation till detta ideal så bör vi rikta vårt intresse både mot matematikundervisningens målsättningar och mot dess undervisningsformer (eller i mer generell mening dess undervisningskultur).

Det blir då uppenbart att en matematikundervisning som endast består av räknedrill och inläring av algoritmer är otillräcklig i förhållande till denna strävan där även människors utveckling i termer av demokratisk fostran innefattas. I någon mån kan sådan kritik även riktas mot en matematikundervisning som ensidigt fokuserat ämneskvalifikationer och inriktat sin metodik strikt efter ämnets struktur. Den vitt spridda negativa bilden av matematikundervisningen kan säkert ha sin utgångspunkt i detta, eftersom denna typ av undervisning inte framstår som meningsfull eller nyttig för eleverna. I en matematikundervisning som strävar efter att utveckla sådana förmågor som är viktiga i demokratiska samhällen – som självförtroende och kritiskt tänkande – är det därför viktigt att alla lärare kontinuerligt reflekterar över vilken mening som ska kopplas till matematikundervisningen. Undervisning i matematik, respektive räkning, är sedan hundratals år bestämd via läroplaner och liknande och dess innehållsliga kanon framstår lätt som given. Därför aktualiseras frågor om matematikundervisningens mening ofta endast indirekt, i form av outtalade uppfattningar som återverkar i undervisningskulturen och/eller i de eftersträvalda kunskapsmålen. Ändå är det viktigt att en medvetenhet om meningen med den planerade undervisningen alltid finns med när undervisningen utformas och ett undervisningsmoment väljs.

Sedan ungefär femton år diskuteras frågor om matematikundervisningens allmänna kunskapsmål och bildning genom matematik åter i högre grad inom matematikdidaktiken i Tyskland.<sup>1</sup> Vid mitten av 1980-talet konstaterades inom pedagogiken att 1970-talets vetenskapsorienterade undervisning endast åstadkommit ett ansamlande av lösräckta kunskaper och färdigheter. Man upplevde att där saknades någon typ av ”integrerat centrum”, eller ”fokuserande, överordnade orienterings- och bedömningskriterier” (Klafki 1985/1991, s 44). Med utgångspunkt från Wolfgang Klafki har sedan begreppet ”Allmänbildning” fått fotfäste inom pedagogiken, i allmändidaktiken och delvis även inom ämnesdidaktiken. Begreppet knyter an till de gamla bildningsteorierna men skiljer sig också från dessa genom att de tre aspekterna: ”Bildning för alla” (alla samhällsskikt och alla folkgrupper), ”Allsidig bildning” (bildning med huvud, hjärta och hand) och ”Centrala samtidsfrågor” (samtida problem för mänskligheten såsom säkrandet av fred, ekologiska och ekonomiska problem, befolkningstillväxt och så vidare) betraktas som grundläggande utgångspunkter inom

all form av bildning. Utifrån tidigare erfarenheter står det klart att en deduktion av allmänbildningsbegreppet, som upprättandet av någon slags kataloger över innehåll och metoder, är en omöjlig väg. Det är snarare tvärtom så att när ramarna sätts av bredare allmänna målsättningar och perspektiv på allmänbildning kan vissa innehåll och metoder uteslutas eller mer fungera som orienteringspunkter i planering av undervisningen. (Man talar också om allmänbildningsbegreppets kompassfunktion.) Hur som helst är det viktigt att allmänbildning vägs in i samband med val av innehåll och metoder. Därmed är sådana överväganden också viktiga utgångspunkter för ämnesdidaktiken, exempelvis matematikdidaktiken.

Som redan omtalats är denna aspekt av ”allmänbildning i matematikundervisning” central för förmedlandet av mening i ett demokratiskt samhälle. På de ”allmänbildande” skolorna kan det, som jag ser det, inte handla om att helt enkelt lära ut ett stycke matematik. Men vad kan då matematikundervisningen bidra med till allmänbildningen i ett demokratiskt samhälle? För att närma sig dessa frågor kan man börja med att dela in skolans allmänbildande uppgifter i följande fyra kategorier (jämför exempelvis Graumann 1993a, 1993b, 2002a, 2002b):

- Förklaringsdimension (förståelse av världen, omvärldsorientering),
- Pragmatisk dimension (vardagsnytta, levnadsförberedelse i avgränsad mening),
- Personlighetsdimension (utvecklande av personlighet och personlig identitet),
- Social dimension (liv i gemenskap, samarbete och ansvarstagande).

Med utgångspunkt i denna inledning kommer jag nu närmare beskriva den betydelse som allmänbildning i matematikundervisning kan ha i ett demokratiskt samhälle.

## Förklaringsdimension

Varje enskild människa bör förstå så mycket av världens enskildheter och sammanhang som möjligt för att kunna skapa sig en egen bild av världen.

En viktig aspekt av ett demokratiskt samhälle är det gemensamma vetandet. I antikens Aten måste exempelvis alla medborgare som deltog i demokratiska processer vara läskunniga. I den medieöverflödets tidsålder vi lever idag är det viktigt för medborgare i demokratiska samhällen att kunna genomskåda så många enskildheter och sammanhang som möjligt. Sådant är givetvis alltid endast i begränsad utsträckning möjligt. Skolans uppgift är att lägga en grund för detta och uppmuntra till en ifrågasättande hållning. Eleverna måste erfa att kunskap kan betyda makt och att den egna kunskapen i viss utsträckning kan betyda befrielse (emancipation) från andras makt. Troligen insåg redan Thales från Miletos matematikens (respektive naturfilosofins) emancipatoriska karaktär och sökte därför efter ”bevis”; ett faktum som varje tänkande människa inser inte låter sig utan vidare undanskuffas ens av en demagog eller despot. I en demokrati är det viktigt att kunna skilja förhållanden som är givna från sådana som kan regleras genom majoritetsbeslut. När det gäller givna förhållanden bör man skilja mellan äkta och påstådda sådana. I vilket fall tycker jag det framstår som klart att vetande och behovet av kunskap är viktiga allmänbildande aspekter av ett demokratiskt samhälle. Vilken kunskap elever ska förvärva i vilken ålder och hur detta förvärvande bör ske kan givetvis inte besvaras i någon generell mening utan beror på individuella och samhällsliga omständigheter. För att tydliggöra kunskapens frigörande kraft (så att kunskapsförmedling och kunskapsstestande inte återigen upplevs som ett maktinstrument) och uppmuntra en kunskapssökande hållning förefaller det vara en god princip att i så hög utsträckning som möjligt låta eleverna själva söka egna insikter och att kontinuerligt lyfta fram och reflektera över meningen med kunskapsinhämtandet (särskilt vid lärarföreläsningar).

Vad kan då matematikundervisningen bidra med till denna förklaringsdimension?<sup>22</sup> Som redan nämnts är fostran till sakligt, logiskt tänkande som inte låter sig påverkas av andra faktorer, en viktig del. Vidare är grundläggande kunskaper i räkning såsom insikter i geometri och statistik säkerligen bra att ha med sig. Viktigt är också (om än endast möjligt på exemplnivå) att bearbeta sakfrågor (ur vardagen eller från vetenskap och teknik) med hjälp av matematiken på det vis som den användningsorienterade matematikundervisningen eftersträvar. För att begripliggöra världen krävs emellertid även förståelse för tillstånd och sammanhang där inte nödvändigtvis användandet av matematik i vardagen, eller i vetenskap och teknik, spelar en roll. Exempel på sådant är betydelsen av symmetri i vår värld, den digitala teknikens princip med binär kodning, naturens skiftande tillväxtförhållanden, analysens roll i klassisk fysik, egenskaper hos dynamiska självreglerande system, simulering av komplexa skeenden (som exem-

pelvis klimatförändringar) med modern datorteknik liksom datorteknologins principer och egendynamik. Inom ramen för skapandet av kulturell koherens<sup>3</sup> hör emellertid även kunskap om almanackor, ornament och föreställningar om siffror i förhistorisk tid till denna dimension, liksom användningen av ett platsvärdessystem för de naturliga talen från babylonierna till Adam Riese, tillkomsten av bevis och sambanden mellan religion, filosofi och matematik hos antikens greker, den roll talrelationer spelade i antikens musikteori och rotens betydelse för uppkomsten av vältempererad stämning, den roll Euklides *Elementa* spelade under tvåtusen år efter sin tillkomst, upptäckten av den icke-euklidiska geometrin samt den utveckling av den moderna matematikens tanke sätt som därav följde. Dessutom hör det till förståelsen av vår värld, och människorna i den, att uppleva att människor också kan fångas av rent teoretiska frågeställningar och att man via vardagsfrågor kan ledas in i teoretiska resonemang. Exempel på sådant är hur man i den arabiska världen ägnat sig åt ornament eller hur människor under 1800-talet intresserade sig för spel och lotterier. Ett exempel på rent teoretiska frågor som spelat en viktig roll i Pythagoras religion är upptagenheten med talteoretiska problem av typen sökande efter perfekta tal och utforskandet av figurativa tal.

## Pragmatisk dimension

Varje enskild människa bör skaffa sig sådana viktiga insikter, kunskaper och färdigheter som innebär ett stöd i hans eller hennes nuvarande och framtida liv, i detta skall även de samhällliga problemen och det gemensamma skapandet av den framtida världen innefattas.

En annan av skolans givna uppgifter är att bistå eleverna med sådana insikter, kunskaper och färdigheter som de behöver för att bemästra problem de ställs inför både i dag och i framtiden. Med bemästra problem avses då inte endast att i matematisk mening lösa dem, utan det kan också innebära att ta hjälp av facklitteratur eller experter eller att konstatera att problemen inte går att lösa med de medel som för tillfället står till buds.

Grundläggande färdigheter i räkning och kunskaper i användandet av matematik hör till denna dimension och är, som sagt, också en grund för livet i en demokrati. Förutom dessa bör den pragmatiska

dimensionen innefatta utvecklandet av allmänna förmågor som problemlösningsförmåga, kreativitet, föreställningsförmåga och utvecklandet av grundläggande sätt att tänka, som att kunna reagera i oväntade situationer (på individuell eller samhällelig nivå). I en vidare bemärkelse kan man även räkna in sociala kompetenser som kommunikationsförmåga och formella kompetenser som argumentationsförmåga och förmåga att klassificera, ordna, generalisera, analogisera och strukturera; förmågor som kan underlätta problemlösande i såväl privatliv som arbetsliv.

## Personlighetsdimension

Varje enskild människa bör grundlägga en självständig personlighet med gott självförtroende och förmåga att utveckla såväl mer allmänna förhållningssätt och inställningar som sina egna individuella förmågor och intressen.

I en demokrati behövs människor som är utrustade med självförtroende och civillkurage. Alla människor behöver inte inneha samma förmågor men varje ung människas möjligheter att utveckla personliga förmågor och intressen bör uppmuntras och hans eller hennes självförtroende bör stärkas. Till detta hör för det första allmänna förmågor att uppfatta och reflektera, såsom psykomotoriska kompetenser, för det andra inställningar och hållningar, såsom beredskap att ta sig an saker och människor eller ta ansvar för en viss fråga eller samhällelig uppgift, för det tredje aspekter som präglar en människas världsbild, för det fjärde förmåga att använda sitt kritiska förnuft och kunna reflektera över de egna gränserna samt de gränser som ett samhälle, eller hela mänskligheten, måste förhålla sig till.

För matematikundervisningen handlar det då om att bidra till utvecklandet av allmänna kognitiva förmågor (jämför till exempel de formella målsättningar som nämnts ovan), sådant som att utveckla den inom många områden viktiga rumsuppfattningsförmågan, utveckla intuitionen, bidra till elevernas förvärvande av förmågan att förstå och skapa grafiska och andra framställningar (inklusive förmåga att rita) och uppmuntra till flexibilitet i tänkandet.<sup>4</sup>

Dessutom handlar det i matematikundervisningens personlighetsdimension om uppmuntrande till upptäckarglädje (till exempel vid behandlandet av matematiska problemområden), det lekfulla när-

mandet av vissa teman (till exempel geometriska pussel eller variationen av uppgifter) och den estetiska upplevelsen (till exempel vid geometriska ornament eller regelmässigheter) samt det kritiska reflekterandet över matematiseringen inom många livsområden och över gränserna för de matematiska modellerna.

## Social dimension

Varje människa bör kunna se sig själv som medlem i olika sociala gemenskaper och även kunna närma sig dessa.

Människan är en social varelse, hon lever av och för gemenskap. I en demokrati är samarbete och ömsesidigt utbyte av information och uppfattningar särskilt viktigt. Därför är eftersträvandet av egenskaper som samarbetsförmåga, grupp känsla, kommunikationsförmåga, empati och solidaritet viktiga uppgifter för skolan. I detta sammanhang bör även värnandet om ”humana” umgängesformer och former för konflikthantering nämnas. Trots att just former för gemensam problemlösning är av central betydelse i en demokrati så råder idag ofta en ton av missaktning eller hänsynslöshet människor emellan. Därför är det en viktig uppgift för skolan att eleverna där kan lära sig, och träna på, att beakta och ta hänsyn till andras uppfattningar när de närmar sig olika frågor.

Just i matematikundervisningen (tillsammans med undervisningen i naturorienterade ämnen) kan ett bidrag till detta göras i och med att man där kan upptäcka att gemensamt arbete med problemlösning ofta är mer framgångsrikt än det ensamma grubblandet. För att möjliggöra detta måste matematikundervisningen givetvis erbjuda nog med tillfällen till den typen av arbete och inte fyllas av lärares presentation, och elevernas rutinmässiga inövande, av ett givet ämnesinnehåll. Det gemensamma lösandet av matematiska problem samt användande av matematik i klass- och grupsituationer måste därför ske i betydligt större utsträckning än vad som hittills varit vanligt. Lärarnas uppgift här handlar om att finna problemuppgifter som är anpassade både efter elevernas ålder och deras kunskapsnivå och som innehåller frågor som är relevanta i förhållande till den matematik som ska läras. Lärarnas uppgift består också i att fungera som ett stöd för de enskilda grupperna i deras arbete och, om så behövs, hjälpa dessa med arbetsfördelning och oenigheter som kan uppstå

inom gruppen eller mellan de olika grupperna. För att utveckla förmåga till ansvarstagande i samhället är det också viktigt att matematikundervisning tar sig an aktuella samhällsfrågor och centrala samtidsproblem (som befolkningsfrågan, energifrågor, försäkringsfrågor i samband med naturkatastrofer, vattenhushållningsfrågor, avfallshantering, fördelning av mandat efter valresultat och liknande).

## Slutord

Fostrandet av unga människor för ett demokratiskt samhälle måste framför allt inrikta sig på att dessa ska ha möjlighet att utveckla en allsidigt bildad personlighet. Till en sådan hör (som redan nämnts) förståelse av omvärlden och oss själva, förmåga att närma sig problem på ett fruktbart vis, utvecklandet av individuella insikter och färdigheter samt värnandet om det gemensamma arbetet. I detta kan matematikundervisningen medverka genom att de allmänbildande aspekterna av ämnet ges en mer framskjuten plats. Kunskap och kompetens i matematik utgör en grund för detta. Om bara strävanden efter förståelse och generella färdigheter ges plats och lärarna ibland stannar upp och reflekterar över matematikundervisningens mening så kan matematikundervisningen också medverka i arbetet för en mer human värld där alla människors välbefinnande står i centrum.

*Översättning: Matilda Wiklund*

## Noter

1. Bland annat förs denna diskussion inom *Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* [Föreningen för matematikdidaktik] (GDM) av arbetsgruppen *Mathematik und Bildung* som jag tillhört sedan den grundades 1990. Förutom flera enskilda utgivningar har arbetsgruppen även publicerat tre böcker som tillkommit i samarbete: *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht* [Mer allmänbildning i matematikundervisningen] (1993), *Mathe, ja bitte – Wege zu einem anderen Unterricht* [Matte, ja tack – vägar till en annan undervisning] (1998) *Mathematik – unsichtbar, doch allgegenwärtig* [Matematik – osynlig men allomstädes närvarande] (2002). Alla utgivna på Polygonverlag: Buxheim-Eichstätt.
2. Givetvis kan de allmänbildande aspekterna av matematikundervisningen endast ge ett bidrag till den sammantagna utbildningen. Till detta kommer att de omtalade fyra dimensionerna inte alltid entydigt kan särskiljas från varandra.



3. Hans Werner Heymann myntade detta begrepp för ungefär femton år sedan (Heymann 1989) och avser därmed både upprättandet av kulturell kontinuitet och öppenheten inför andra kulturer.

Uppmärksamheten riktas därmed inte längre ensidigt mot bevarande och reproduktion av det kulturella arvet i termer av upprättandet av ett samband mellan ”då och nu”, utan handlar också om att föra samman olika traditioner och delkulturer som existerar samtidigt i ett samhälle. Kulturell koherens är relaterad både till diakrona och synkrona aspekter (Heymann 1996, s 68).

4. I vår tid av snabba förändringar där många problem är av flerdimensionell karaktär är exempelvis det sätt att tänka som bevaras via de ännu vanliga rutinuppgifterna ingen god förberedelse inför livet i ett modernt demokratiskt samhälle. Förutom enskilda förmågor bör även utvecklandet av processstyrningsmaximer (handlingsorientering) inom öppna system – vad jag gärna betecknar som ”synergitänkande” tränas. En matematikundervisning som även ägnar sig åt mer komplexa frågeställningar och som är öppen för elevernas egna beslut i problemlösningsprocessen är då lämplig.

## Referenser

- Dewey, John (1916/1999): *Demokrati och utbildning*. Göteborg: Daidalos.
- Dewey, John (1916/1964): *Demokratie und Erziehung* [Democracy and Education]. Braunschweig: Georg Westermann Verlag.
- Graumann, Günter (1989): Über den Sinn des Mathematikunterrichts und dessen Vermittlung [Om matematikundervisningens mening och dess förmedlande]. I *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989*, s 155–158. Hildesheim: Franzbecker.
- Graumann, Günter (1993a): Wodurch wirkt der Mathematikunterricht allgemeinbildend? Vier Beispiele aus dem Geometrieunterricht [Varigenom fungerar matematikundervisningen allmänbildande? Fyra exempel från geometriundervisningen]. I Arbeitskreis Mathematik und Bildung, red: *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht*, s 55–68. Buxheim: Eichstätt.
- Graumann, Günter (1993b): Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule [Matematikundervisningens roll i skolans bildningsuppdrag]. *Pädagogische Welt* 5/1993, s 194–199 (och 204).
- Graumann, Günter (2002a): Allgemeinbildung durch Mathematik und allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts [Allmänbildning genom matematik och matematikundervisningens allmänna mål]. I *Mathematikunterricht in der Grundschule*, s 97–108. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

- Graumann, Günter (2002b): General education in mathematics lessons – an introduction to humanistic holistic education. I Alan Rogerson red: *The Mathematics Education into the 21st Century Project*, s 153–157. Proceedings of the International Conference The Humanistic Renaissance in Mathematics Education, Sicily (Italia) 2002.
- Heymann, Hans Werner (1989): Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? [Allmänbildande matematikundervisning – vad kan det vara?] *Mathematik lehren* 33, s 4–9.
- Heymann, Hans Werner (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik* [Allmänbildning och matematik] Weinheim und Basel: Beltz.
- Klafki, Wolfgang (1985/1991): *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik* [Nya studier om bildningsteori och didaktik]. Weinheim und Basel: Beltz.