

Tema: Bildning och demokrati i matematikutbildningen

Bildningsfrågan har åter hamnat i den offentliga diskussionen – inte minst genom ifrågasättandet av matematikutbildningen inom både skola och högskola. Högskoleverket har startat en särskild bildnings-satsning och särskilda bildningskurser om fem poäng ges vid olika lärosäten. Frågan är dock om inte bildningsbegreppet riskerar att instrumentaliserats i denna process och därigenom berövas sitt innehåll. För *bildning* finns till skillnad från *utbildning* inga på förhand uppsatta mål. Bildning, skriver Gunnar Bergendahl (1985), är sökande, prövande och värderande. Bildning berikas av erfarenheter, mot- och framgångar i mångfalden av mänskliga gemenskaper.

Bildning – varför just nu, frågar sig Lars Mouwitz (2004), och nämner tre obehag, som skäl till att bildningsbegreppet åter kommit i blickfånget. De snabba samhällsförändringarna och den sociala ingenjörskonstens tillkortakommanden har gjort att en känsla av osäkerhet har smugit sig in i tillvaron. Den högre utbildningen likriktas och görs till instrument för olika avnämares syften. Är det inte mer än så, med utbildningen? Utbildning som demokratiskt projekt håller på att falla sönder. I stället handlar det mer och mer om att förverkliga ett individuellt projekt.

Bildningsdiskussionen är på intet sätt begränsad till Sverige utan förs i flera europeiska länder – inte minst i den tyska Förbundsrepubliken. Den tyska självbildningen som ledande bildnings- och kulturnation fick sig en ordentlig knäck sedan internationella undersökningar, som TIMSS¹ och PISA², visade att resultaten i matematik, naturvetenskap och det tyska språket var högst mediokra, för att inte säga direkt undermåliga. Knappast någon annanstans slår den sociala bakgrunden hos eleverna igenom på deras studieresultat som här.

Den tyska nationen har alltför länge definierat sig i ekonomiska termer – det tyska näringslivsundret efter andra världskriget – och negligerat sitt kultur- och bildningsarv, skriver Julian Nida-Rümelin (2005),

professor i politisk teori och filosofi och tidigare socialdemokratisk minister, i liberala *Die Zeit*. Just nu kan två motstridiga tendenser urskiljas. Å ena sidan en ekonomisering och instrumentalisering av det tyska utbildningsväsendet. Å andra sidan en kritisk diskussion med krav på att Förbundsrepubliken åter måste definiera sig som en bildnings- och kulturnation. Kanske står Förbundsrepubliken vid en vändpunkt. Det handlar mindre om val av olika organisationsformer och mer om en förnyelse av innehållet i ett humanistiskt bildningsväsende. Nida-Rümelins diskussion handlar inte om ett snävt tyskt fenomen, utan vi kan se den pågående diskussionen om utbildningsväsendets globalisering som en del i utvecklingen av en europeisk offentlighet.

Så snart en arena erbjuds för dialog och meningsutbyte uppstår oenighet (Göranzon & Mouwitz 2005). Det finns en äkta oenighet som beror på tillvarons komplexitet. Men frågan är: kan en oenighet vara berättigad? Jag tror det. Det är i samtalet mellan olika röster som en samstämmighet kring ett gemensamt perspektiv kan växa fram. Skillnaderna berikar förutsättningen för att forma det gemensamma. De temabaserade artiklarna i detta nummer av *Utbildning & Demokrati* är några röster som utifrån olika perspektiv diskuterar två centrala dimensioner i matematikutbildningen – bildning och demokrati.

Bildningsvägar

Matematik har, vid sidan av latinets, av tradition uppfattats som bildningsämnet *per se*. *Artes liberales*, de fria konsterna, med sitt ursprung i antiken, var under medeltiden bildningsvägar, *viae*, till något annat. Varje student i den tidiga medeltidens Bologna eller Paris måste först tillhöra *artes*-fakulteten, oberoende av om han senare skulle bli jurist eller präst (Thompson 1988). Att i vår senmoderna tid hävda betydelsen av att kunna matematik, inte för att bygga maskiner eller programmera datorer, utan för att genom matematiken bilda sig, känns måhända som en anakronism, särskilt med tanke på den strida ström av eländesbeskrivningar av skolans matematikutbildning – Matematikdelegationens betänkande (SOU 2004:97), den nationella utvärderingen av grundskolan (Skolverket 2004a), PISA (Skolverket 2004b) och TIMSS (Skolverket 2004c) – som publicerades under hösten 2004.³

Vore det inte bättre och mer ändamålsenligt om skolan fokuserade på vardagsnära och ”nyttiga” kunskaper. Tänk bara på sådant som att köra bil, använda datorer, fylla i deklaraionsblanketter, reparera lägenheten, hantera hushållsekonomin, sortera soporna och handla miljövänligt? Ett problem skulle naturligtvis vara hur den närmast explosionsartade tillämpningen av vetenskapen på en mängd

områden skulle få plats i skolans undervisning. Hur ska man välja ut det viktigaste? Viktigare än det isolerade kunnandet i olika saker är tänkandet och användandet av vetandet.

Att arbeta med hypoteser och strävan efter att förallmänliga är karakteristiskt för det matematiska tänkandet. Just häri ligger dess bildningsdanande karaktär – dess strävan att generalisera oberoende av innehåll, hävdar Michael Otte och Michael Hoffmann (1996). När filosofen Karl Popper talar om kunskapens hypotetiska karaktär, så är det just detta han avser. Matematikens (och andra vetenskapers) allmänbildande karaktär ligger däri att de som teorier är rum för tänkandets utveckling och inte bara innehåll i läroböcker samt metoder och tekniker som man kan lära sig.

Det är uppenbart att svaren på frågor om matematikutbildningens bildnings- och demokratisyftande roll måste bli annorlunda idag än de var i ett agrar- eller industrisamhälle. Ett kanoniserat bildningsbegrepp är inte längre möjligt, eller ens önskvärt. Men hur skulle ett alternativt bildningsbegrepp kunna gestaltas och hur kan matematikämnets bildningssträvanden och demokratiska dimensioner hävdas i vår tid?

Matematik och allmänbildning

Den tyska matematikdidaktikern Hans Werner Heymanns habilitationskrift *Allmänbildning och matematik* (1996) väckte stor uppståndelse när den kom ut (se till exempel artiklar i *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*: Bruder 1997, Diedrich 1997, Führer 1997, Henning 1997, Lengnink 1997). Heymann hävdade att en matematikutbildning för alla innebär att vi måste ifrågasätta mycket av innehållet i skolans matematikkurser. Trots de stora bildningsanspråk som matematik av tradition har, får många elever och studenter stora problem med matematiken. Misslyckanden leder till att de får en negativ inställning och tar avstånd från matematiken. Detta i sin tur förorsakar svårigheter för dem att lära sig matematik och många gånger även andra ämnen. Bildningseffekten blir, trots goda intentioner, därför låg.

Günter Graumann tematiserar i den inledande artikeln ALLMÄNBILDNING I MATEMATIKUNDERVISNING I ETT DEMOKRATISKT SAMHÄLLE hur matematikutbildningen kan bidra till skolans allmänbildande uppgifter utifrån fyra dimensioner: en förklaringsdimensionen som berör individens förståelse av världen, en pragmatisk dimension som avser matematikens nyttoaspekt, en personlighetsdimension som handlar om att utveckla individens självförtroende och kritiska sinnelag samt en social dimension som tar sin utgångspunkt i människan som en social varelse. Ett bildningsbegrepp, som en katalog över ett särskilt innehåll och

särskilda metoder, är en omöjlig väg menar Graumann. En fostran av unga människor måste inriktas mot att utveckla en allsidig personlighet.

Skolans dubbla uppdrag

I ett tidigare nummer av *Utbildning & Demokrati* behandlades skolans dubbla uppdrag, dels att förmedla kunskaper, dels fostra barn och ungdomar till självständiga samhällsmedborgare. Det finns en risk att detta dubbla uppdrag uppfattas som två skilda delar eller aspekter av verksamheten, skriver Christer Fritzell (2003). Vi får då lätt en motsättning mellan de två uppdragen.⁴

Lena Fritzén (2003) diskuterar i samma nummer möjligheten av ämneskunnande och demokratisk kompetens som en integrativ helhet. Är det möjligt, frågar hon, att uppfatta demokratisk kompetens som en del av ämneskompetensen och vice versa. Hon driver utifrån ett habermasianskt perspektiv tesen att detta bäst kunde göras inom ramen för en pedagogisk praktik som integrerar ett kommunikativt perspektiv på lärande och ett deliberativt förhållningssätt på demokrati. Hon refererar ett exempel på kritiskt förhållningssätt i matematikundervisningen från Ole Skovsmose (1994). Jag ska pröva med att erbjuda ett annat exempel från matematikens värld.

Matematik och demokrati

Diskussioner om matematikutbildningens demokratisyftande roll tar ofta sin ansats i en utilitaristisk utgångspunkt, matematikens nytta för eleverna/studenterna som konsumenter, väljare, deltagare i samhällsdebatten, och så vidare framhävs. Utan att förringa betydelsen av nyttoaspekten kan man hävda en helt annan och mer grundläggande utgångspunkt – att matematikundervisning är demokratiutbildning. Idéerna kan, som Colin Hannaford (1999) visar, föras tillbaka till antikens Aten. Och skulle jag vilja tillägga, kopplas till en deliberativ demokratisyn.

Samhälleliga förändringar som globalisering och migration har idag i grunden förändrat nationalstaten. Utrymmet för en nationell politik har drastiskt minskat och de stora överlevnadsfrågorna kräver ett internationellt samarbete. Frågor om hur samhälleliga beslut ska tas på nationell och internationell nivå, liksom hur ett folkligt deltagande i dessa processer ska kunna garanteras, har förts upp på dagordningen.

Inom en deliberativ demokratisyn sätts kommunikationen, samtalet, i centrum. Man använder begreppet deliberativa samtal, för att beskriva de samtal där deltagarna får utrymme att ge uttryck för och

överväga egna och andras åsikter och synpunkter. Sådana samtal betraktas som demokratins bärande element genom att olika uppfattningar och värden kan brytas mot varandra med en strävan efter att individen själv tar ställning genom att lyssna, överväga, söka argument och värdera, samtidigt som det finns en kollektiv strävan efter att finna värden och normer som alla kan enas om. Genom att applicera denna demokratisyn på utbildningsväsendet vidareutvecklas och tydliggörs skolors demokratiska uppdrag. (Jag ska inte här problematisera den deliberativa demokratin, utan mitt syfte är att visa på matematikutbildningens demokratiska dimensioner, varför framställningen om den deliberativa demokratin blir något förenklad.)

Den deliberativa demokratis grundidé är att beslutsfattandet bör motiveras och diskuteras grundligt mellan alla berörda parter. Man måste bli enig om vad man är oenig om, vilka alternativa beslut som kan fattas och vilken procedur man skall ha för att fatta beslut.

Under det senaste decenniet har den matematikdidaktiska forskningen alltmer kommit att uppmärksamma den centrala roll *reasoning* spelar inom matematiken.⁵ Reasoning ska här förstås som att resonera, argumentera, göra slutledningar och att leda något i bevis – med andra ord att kommunicera det som vi har möjlighet att veta något om. Innebörden är något vidare än den som traditionellt ges inom matematiken i form av formell bevisföring.

I grundskolans kursplan i matematik har reasoning tilldelats en central roll. Under *mål att sträva mot* står:

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven [...]

– utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande (Skolverket 2000, s 26).

Det finns en omfattande litteratur, både empiriska och teoretiska studier, kring barns och vuxnas förmåga till slutledningar, syllogismer, inom den kognitiva forskningen. En invändning mot denna forskning är att människors sätt att resonera och dra slutsatser i vardagen sällan följer dessa syllogismer, utan de måste studeras och förstås i relation till den socio-kulturella kontext vari slutledningarna dras. Inom matematikdidaktisk forskning finns studier i hur elever/studenter använder analogier, metaforer/metonymier och bilder/figurer när de resonerar. Argumentationsprocessen har studerats och modellerats. Vidare har man studerat hur elever/studenter uppfattar och arbetar med bevisföring och bevis.

Matematikundervisning som demokratisyfande utbildning

I både grundskolans och gymnasieskolans kursplan är matematikämnets demokratisyfande roll tämligen nedtonat. Detta trots att matematik kanske är det skolämne som har störst potential att fungera demokratisyfande genom den centrala roll som reasoning spelar inom matematiken. Genom att lyfta fram reasoning som en central matematikaktivitet i skolan får eleven/studenten möjligheter att utveckla deliberativa förhållningssätt, det vill säga att individen själv tar ställning genom att lyssna, överväga, söka argument och värdera, samtidigt som det finns en kollektiv strävan efter att finna värden och normer som alla kan enas om. Matematikundervisningen blir *i sig* demokratiutbildning – en utbildning syftande mot medborgarnas deltagande i demokratiska processer.

När jag tar upp dessa frågor med lärarstudenter brukar jag illustrera mitt resonemang med att låta dem i grupper spela olika så kallade logiska spel (till exempel Master Mind). Jag brukar också referera till Wittgensteins uttalande om matematikens karaktär av lek och spel, vilket gör sådana här aktiviteter självmotiverande. Eleverna/studenterna använder sig spontant i aktiviteterna av modala begrepp som möjlighet ("... det kan vara så ...") och nödvändighet ("... det måste vara så ..."). Normen för vad som är giltigt etableras i det sociala samspelet.

Rationalitet och intersubjektivitet

Hur rationalitet etableras genom ett socialt samspel har diskuterats i Jürgen Habermas (1981/1997) teorier om kommunikativt handlande. Han utgår från bland annat Jean Piagets begrepp decentrering. Genom social samverkan sker en decentrering av det individuella tänkandet till en förhandlad verklighet baserad på ömsesidighet och meningskongruens. Det är främst i sina sociologiska arbeten som Piaget (1965/1997) har studerat hur normen för rationalitet uppstår.⁶ I essän "De logiska operationerna och det sociala livet" diskuterar Piaget (1965/1995) logiken utifrån de skilda klassiska sociologiska utgångspunkterna hos Gabriel Tardes⁷ individualism och Émile Durkheims holism. Piaget pläderar där för ett *tertium quid*⁸:

If logical progress goes hand in hand with progress in socialization, is it because the child becomes capable of rational operations due to the fact that social development makes him capable of cooperation; or, on the contrary, is it because his individual logical acquisitions permit him to understand

other people and thus lead to cooperation? Since the two sorts of progress go completely hand in hand, the question seems to have no solution except to say that they constitute two indissociable aspects of a single reality that is at once social and individual (Piaget 1965/1995, s 145).

Man kan också, som Wittgenstein hävdar, säga att logiken avspeglar vårt sätt att tänka.⁹ Habermas knyter explicit an till Wittgensteins språkspelsbegrepp i sin teori om det kommunikativa handlandet. Meningen hos ett språkligt uttryck bestäms av dess användning, det vill säga av de regler som utvecklats i denna språkliga praxis. Att tala om meningen hos en sats är att tala om den roll den spelar i ett bestämt språkspel. Att förstå denna mening handlar om att kunna delta i det aktuella språkspellet i de aktuella situationerna (se Svensson 1992). Möjligheten att följa en regel och att använda ett språkligt uttryck förutsätter en redan etablerad offentlig praxis.

Språk och verklighet

Inte sällan ses naturvetenskaplig forskning som uppgiften att upptäcka ”verklighetens matematik”. Enligt detta synsätt betraktas verkligheten som en förklädd matematik. I *Håkan Lennerstads* artikel MATEMATIKENS DUBBELNATUR – UNDFLYENDE INNEHÅLL, SJÄLVTILLRÄCKLIGT SPRÅK prövas en motsatt utgångspunkt: matematiken är en språklig förklädnad för människors observationer av skilda aspekter av verkligheten. Abstrakt matematisk forskning handlar om verkligheten, men i förklädd form.

I artikeln används ordet *matematiska* om matematikens *formelspråk* – som ett språk med ett specifikt alfabet och en specifik regelsättning, det vill säga en egen grammatik. Matematiskans alfabet omfattar cirka hundra symboler. De består av tio siffror, latinskt och grekiskt alfabet, samt ett antal specialtecken. Dess grammatik består av språkliga konventioner samt av logiska regler som grammatiserats, det vill säga matematiska sanningar som används som språkliga regler utan att tolkas. Lennerstad använder termen ”matematiska” i analogi med naturliga språk, för att beskriva ett matematiskt innehåll.

En invändning som kan resas är om matematiken verkligen kan anses vara ett språk. Vi kan ju inte tala matematik(språket). Vi kan bara tala *om* matematik på ett naturligt språk (som svenska, engelska, tyska, ryska, etcetera), men aldrig matematiska.

Symbolisering

Matematik är förknippat med symboler och formler av olika slag. En väsentlig del av den moderna matematiken handlar om symbolisering. För den oinvigde ter sig de matematiska symbolerna många gånger som något mystiskt, för att inte säga magiskt, något som tillhör en förtrollad värld bara några få förunnade att känna till.

Under historiens gång har den matematiska notationen tagit sig olika uttryck, allt från några regelbundet grupperade streck inkarvade i vargben, sumerernas kilskrift inpräglade i lertavlor, egypternas hieroglyfer på papyrusrullar, kinesers, japaners, indiers, arabers och andra kulturers olika teckensystem till våra dagars närmast standardiserade matematiska notation. Matematisk notation är inte bara symboler och formler utan också text. Allt detta kan vi benämna tecken.

Matematiska tecken står *för* något, det vill säga de representerar en idé eller tanke. Människor uttrycker matematiska tankar med hjälp av tecken av olika slag. Vi använder tecken till att tänka med, uttrycka och kommunicera våra tankar med andra människor.

Ett snabbt växande område inom matematikdidaktisk forskning rör sig i gränssnittet mellan semiotik, matematik och didaktik (se till exempel Engström 2002, Winsløw 2004). Här betraktas alla uttryck, symboler, satser, tabeller, diagram, grafer etcetera, som *tecken*. Alla dessa tecken måste tilldelas en mening i läroprocessen. Fokus i forskningen är just denna meningstilldelning. Genom att studera kommunikationsprocessen ur ett semiotiskt perspektiv överskrider de begränsningar som ligger i traditionella kommunikationsstudier där man fokuserar på språkanvändningen.

Matematikutbildning och social rättvisa

Under de senaste åren har intresset för frågor om demokrati, jämlikhet och social rättvisa i relation till matematikutbildning ökat. I temadelen avslutande artikel MATHEMATICS EDUCATION AND SOCIAL JUSTICE – FACING THE PARADOXES OF THE INFORMATIONAL SOCIETY problematiserar *Ole Skovsmose* och *Paola Valero* demokratibegreppet och framför allt konsekvenserna av de omvälvande samhällliga förändringarna under senare år – *Informationssamhället*. Det är ett omstritt och motsägelsefullt begrepp. Informationssamhället kan utvecklas i olika riktningar. Skovsmose och Valero diskuterar två paradoxer inom Informationssamhället – inklusionens och medborgarskapets paradox – som de menar är av vitalt intresse för diskussionen om social rättvisa, jämlikhet och demokrati i relation till matematikutbildning. Avslutningsvis pekar de ut några utmaningar för den matematikdidaktiska forskningen.

Skovsmoses och Valeros artikel reser med nödvändighet frågan om bildning i ett mångkulturellt samhälle, ty den klassiska bildningen var ett västerländskt projekt. Den nyhumanistiska bildningstankens företrädare ser bildningen som en relation mellan individen och ett kulturarv begränsat till det västerländska. Andra kulturer räknas oftast som underordnade den västerländska kulturen, påminner oss Bernt Gustavsson i *Bildning i vår tid* (1996). Med ett sådant synsätt går gränsen mellan civilisation och barbari mellan väst och öst, mellan Europa och alla andra kulturer.

Hur sant har inte detta varit i matematikutbildningen. Den traditionella föreställningen att den moderna matematiken har sitt ursprung i den grekiska matematiken är felaktig. Alla de tidiga kulturerna som växte fram i den gamla världen, runt Huangho-floden i Kina, runt floden Indus i Indien, i Tvåflodslandet i nuvarande Irak och runt Nilen i Egypten framstår alla som givare och mottagare av viktiga influenser vilka möjliggjorde den moderna matematikens framväxt. Vi hittar exempel på en utvecklad geometri i framställningen av bilder i textilier och andra hantverk hos många kulturfolk i Afrika och Amerika. I stort sett inom alla kulturer finner vi gemensamma drag i den matematik som utvecklas under olika sociala och kulturella villkor. Det torde därför vara få av skolans ämnen som har en sådan möjlighet att verka kulturöverskridande som matematiken.

I en tid när målrationella överväganden allt mer gör sig gällande i utbildningsväsendet – inte minst när det gäller hur en matematikutbildning ska formuleras – är det viktigt att utveckla motbilder. Till dessa hör bildning och demokrati som två viktiga dimensioner i en modern matematikutbildning.

Arne Engström

Noter

1. TIMSS, tidigare Third International Mathematics and Science Study, numera Trends in International Mathematics and Science Study, är en internationell undersökning av elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap. TIMSS drivs av IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Femtio länder och regioner deltog i 2003 års studie, som gällde elever i skolår 8. Tidigare studier har gjorts bland annat 1999 och 1995. Se deras hemsida <http://www.timss.org>.
2. PISA, Programme for International Student Assessment är ett utvärderingsprogram inom ramen för OECD. Programmet avser att studera hur utbildningssystemen i olika länder rustar femtonåringar att möta framtiden. PISA genomfördes för första gången år 2000. Se vidare organisationens hemsida <http://www.pisa.oecd.org>.

3. Anmärkningsvärt är den totala avsaknaden av kritiska röster i Sverige mot de internationella undersökningarna. Matematikdelegationen ger till exempel ett förbehållslöst stöd till dem. En ledande nordisk kritiker av PISA- och TIMSS-studierna är fysikern och na-didaktikern Svein Sjøberg vid universitetet i Oslo. Sjøberg är projektorganisatör för en alternativt inriktad internationell jämförande forskningsstudie kallad ROSE, The Relevance of Science Education, <http://www.ils.uio.no/forskning/rose>.
4. Ironiskt nog är det Skolverket som står som ledande företrädare för en sådan dikotomi – allt som oftast kommer ett pressmeddelande från verkets utbildningsinspektion som meddelar resultatet av inspektionen i X kommun, vilken sammantaget visar ett gott resultat med skolans värdegrund, men att kommunen klarar kunskapsuppdraget betydligt sämre. En stilla undran är naturligtvis hur en kommun som misslyckas i sitt uppdrag att lära eleverna grundläggande matematik kan sägas fostra goda samhällsmedborgare. Ett annat uttryck för denna dikotomi är verkets utvärdering *Lusten att lära – med perspektiv på matematik*. Verket ställde sig frågan om undervisningen i matematik skapade lust att lära, men bortsåg helt från frågan huruvida eleverna lärde sig något.
5. Benjamin Peirce definierade matematiken som ”*the science which draws necessary conclusions*”. Benjamin Peirce var professor i matematik och astronomi vid Harvard och far till Charles S Peirce. Citatet är från den berömda, inledande meningen i hans pionjärbete, *Linear Associative Algebra*, från 1870.
6. Samverkan (*coopération*), skriver Piaget,

is the source of three sorts of transformation in individual thinking, all three of which are of nature to permit individuals to have greater consciousness of reason immanent in all intellectual activity.

In the first place, cooperation is a source of reflection and of self-consciousness. On this point, it marks an inversion of meaning, not only in relation to specifically individual sensory-motor intelligence, but also in relation to social authority, which engenders coercive belief and not true deliberation.

In the second place, cooperation dissociates the subjective from the objective. It is thus a source of objectivity, and rectifies immediate experience into scientific experience, whereas constraint is limited to consolidating the former by simply promoting egocentrism to the rank of sociomorphism.

In the third place, cooperation is a source of regulation. Over and above simple regularity perceived by the individual and heteronomous rule imposed by constraint in the areas of both knowledge and morality, it installs autonomous rule, or the rule of pure reciprocity, a factor in logical thought and the principle behind notional systems and signs (Piaget 1965/1997, s 239).

7. Den franske sociologen Gabriel Tarde är förmodligen relativt okänd för många läsare. I *Axess* nr 1/2002 finns en artikel av Lisa Irenius om Tarde som nu blivit föremål för ett förnyat intresse i Frankrike.
8. *tertium quid* = ett tredje något (reds anm).
9. Originalcitaten lyder:

131. Die logischen Gesetze sind allerdings der Ausdruck von »Denkge-
wohnheiten«, aber auch von der Gewohnheit *zu denken*. D. h., man
kan sagen, sie zeigten: wie Menschen denken und auch, *was* Menschen
»denken« nennen (Wittgenstein, 1956/1994, s 89).

...

133. Die Sätze der Logik sind ›Denkgesetze‹, ›weil sie das Wesen des menschlichen Denkens zum Ausdruck bringen‹ – richtiger aber: weil sie das Wesen, die Technik des Denkens zum Ausdruck bringen, oder zeigen. Sie zeigen, was das Denken ist, und auch Arten des Denkens (Wittgenstein, 1956/1994, s 90).

Referenser

- Bergendal, Gunnar (1985): *Bildningens villkor*. Lund: Studentlitteratur.
- Bruder, Regina (1997): Gedanken aus dem Unterricht zu Heymanns Arbeit "Allgemeinbildung und Mathematik". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (2), s 45–48.
- Diedrich, Jürgen (1997): Noch immer "Erziehung durch Allgemeinbildung? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (2), s 38–40.
- Engström, Arne (2002): *Semiotik och matematikdidaktik. En introduktion*. Arbetsrapporter vid Pedagogiska institutionen, 6. Örebro universitet.
- Fritzell, Christer (2003): Demokratisk kompetens – Några steg mot en praktisk-pedagogisk deliberationsmodell. *Utbildning & Demokrati*, 12(3), s 9–39.
- Fritzén, Lena (2003): Ämneskunnande och demokratisk kompetens – en integrerad helhet? *Utbildning & Demokrati*, 12(3), s 67–88.
- Führer, Lutz (1997): Von der Entsorgung mathematischer Bildung durch ihre Theorie ... *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (2), s 53–61.
- Gustavsson, Bernt (1996): *Bildning i vår tid. Om bildningens möjligheter och villkor i det moderna samhället*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- Göranzon, Bo & Mouwitz, Lars (2005): Vad är att förstå? *Dialoger*, 71–72, Gunnar Berg, red: Det matematiska kulturarvet, s 99–121.
- Habermas, Jürgen (1981/1997): *Theorie des kommunikativen Handelns Bd 1 & 2*. Frankfurt/M: Suhrkamp.
- Hannaford, Colin (1999): Mathematics teaching is democratic education. I Hartmut Köhler & Colin Hannaford, red: *Mathematics Teaching and Democratic Education*, s 16–29. A Comenius Project. Stuttgart: Landesinstitut für Erziehung und Unterricht.

- Henning, Herbert (1997): Mathematikunterricht zwischen Anspruch und Wirklicht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (2), s 49–52.
- Heymann, Hans Werner (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.
- Leingnink, Katja (1997): Ist allgemeinbildender Mathematikunterricht möglich? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (2), s 41–44.
- Mowitz, Lars (2004): *Bildning och matematik*. Höskoleverkets rapportserie 2004:29 R. Stockholm: Höskoleverket.
- Nida-Rümelin, Julian (2005): Das hat nie Humboldt gewollt. *Die Zeit*, 60(10), s 48.
- Otte, Michael & Hoffmann, Michael (1996): *Warum ist die Mathematik allgemeinend?* (Opublicerat manus).
- Piaget, Jean (1965/1995): *Sociological Studies* [Études sociologiques. Geneva: Librairie Droz]. London: Routledge.
- Skolverket (2000): *Grundskolan: kursplaner och betygskriterier*.
- Skolverket (2004a): *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004b): *PISA 2003. Svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*. Rapport 2004: 254. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004c): *TIMSS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv*. Rapport 2004:255. Stockholm: Skolverket.
- Skovsmose, Ole (1994): *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens. Betänkande av Matematikdelegationen*.
- Svensson, Gunnar (1992): *Wittgenstein om kunskap och visshet*. Stockholm: Thales.
- Thompson, Jan (1998): Matematik som bildningsämne. *Tvärnsnitt*, (3), s 14–26.
- Winsløw, Carl (2004): Semiotic as an analytic tool for the didactics of mathematics. *NOMAD*, 9(2), s 81–99.
- Wittgenstein, Ludwig (1956/1994): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. 5:e upplagan. Frankfurt/M: Suhrkamp.